

LYCÉE KLÉBER - STRASBOURG

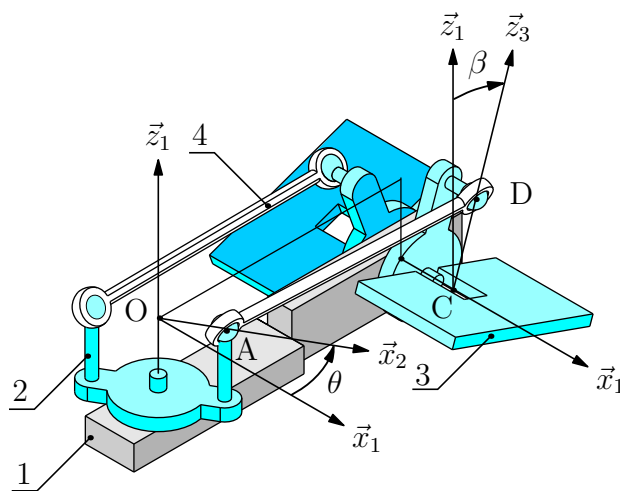
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Cahier n°1

Mécanique des systèmes de solides

Cinématique

Version 2015 - 2017



L. ESCHBACH
P. LECLERCQ
S. LONNI
JD. MOSSER
J. TANOH
R. VINOT

Nom :

Liste des exercices

Chaînes ouvertes	5
CIN_11 Nacelle à flèche télescopique	5
CIN_12 Bras de robot	6
CIN_13 Manipulateur à muscles artificiels	7
CIN_14 Robot de manutention	9
CIN_15 Manège	10
CIN_16 Robot industriel	11
Chaînes fermées	12
CIN_21 Triangle déformable	12
CIN_22 Bielle-manivelle	13
CIN_23 Table élévatrice	15
Roulement sans glissement	16
CIN_31 Roue	16
CIN_32 Roue pivotante	17
CIN_33 Roues pivotantes	18
CIN_34 Segway	19
CIN_35 Chariot filoguidé	20
CIN_36 Comportement d'un véhicule en virage	22
CIN_37 Mouvement d'une bille dans un roulement à billes	24
Contacts et liaisons	25
CIN_41 Identification de liaisons	25
CIN_42 Meule à grains	26
CIN_43 Mécanisme à excentrique	27
CIN_44 Pompe oscillante	28
CIN_45 Pompe à débit variable	29
Transmissions par engrenage	30
CIN_51 Engrenage	30
CIN_52 Train d'engrenages	31
CIN_53 Train épicycloïdal	32
CIN_54 Pignon-crémaillère	33
CIN_55 Différentiel linéaire	34
CIN_56 Réducteur à renvoi d'angle	35
CIN_57 Différentiel	36
CIN_58 The Falkirk Wheel	37
CIN_59 Cinématique d'un engrenage	38
Transmissions par courroie	40
CIN_61 Poulie-Courroie	40
CIN_62 Mécanisme épicycloïdal	41

Lois de commande	42
CIN_71 Lois de commande d'un moteur de robot	42
Résolution graphique	43
CIN_81 Robot à structure parallèle	43
CIN_82 Robot « Ericc »	44
CIN_83 Bras hydraulique AMPLIROLL	46
CIN_84 Robot ABB340	48
Approche qualitative	50
CIN_91 Mécanisme à CROIX DE MALTE	50

CIN_11 Nacelle à flèche télescopique

Soit une nacelle à flèche télescopique décrite sur la figure ci-dessous ; elle comprend :

- un châssis 1 ;
- une tourelle 2 ;
- un bras 3 ;
- une flèche 4.

exo-nacelle-telescopique-v1

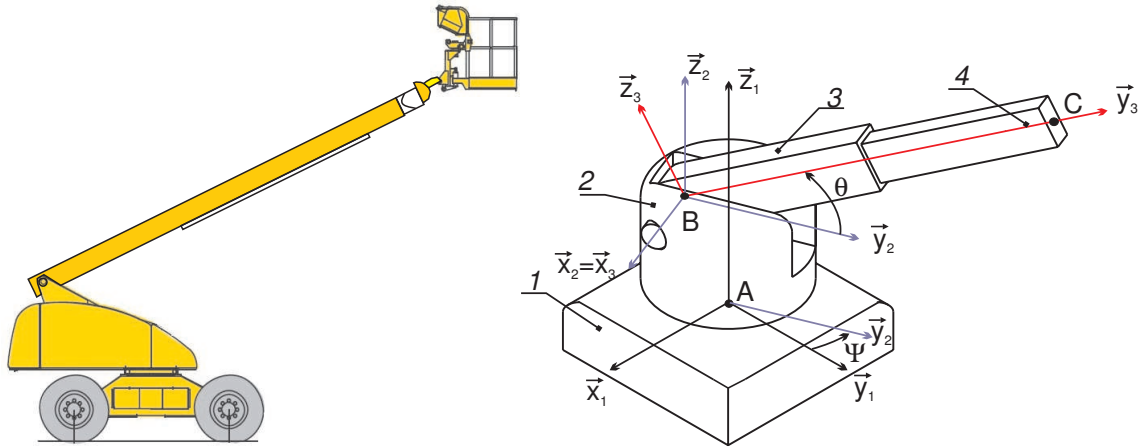


FIGURE 1 – Description de la nacelle à flèche télescopique

Le mouvement de la tourelle 2 par rapport au châssis 1 est une rotation d'axe (A, \vec{z}_1) , caractérisée par l'angle $\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Le mouvement du bras 3 par rapport à la tourelle 2 est une rotation d'axe (B, \vec{x}_2) , la rotation étant définie par l'angle $\theta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

la flèche 4 est en mouvement de translation rectiligne de direction \vec{y}_3 par rapport au bras 3, sa position étant caractérisée par $\overrightarrow{BC} = \lambda(t)\vec{y}_3$.

La géométrie de la tourelle est telle que : $\overrightarrow{AB} = h\vec{z}_2 - a\vec{y}_2$.

- Q1** Exprimer les éléments de réduction des torseurs cinématiques $\mathcal{V}(2/1)$, $\mathcal{V}(3/2)$ et $\mathcal{V}(4/3)$.
- Q2** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(C, 4/1)$ par composition des mouvements.
- Q3** Déterminer le vecteur accélération $\vec{A}(C, 4/1)$.

CIN_12 Bras de robot

[t1-3.6]

pub-bras-de-robot-v1

La figure 1 ci-dessous propose une architecture d'un bras de robot industriel. Ce dernier se compose de quatre pièces numérotées de 1 à 4, dont les assemblages autorisent trois mouvements de rotation.

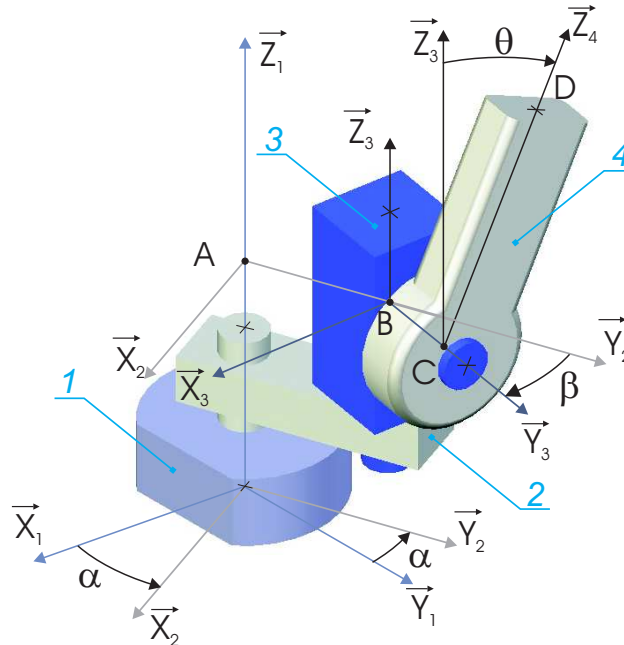
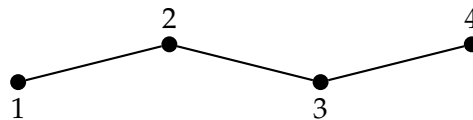


FIGURE 1 – Architecture simplifiée d'un bras de robot

Cette structure comporte une chaîne fermée de solides



On exprime les torseurs cinématiques correspondant aux mouvements autorisés.

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(3/2) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(4/3) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

On s'intéresse aux performances au niveau de l'extrémité D du bras de ce robot. Ce point est défini par

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

avec $\overrightarrow{AB} = a\vec{y}_2$, $\overrightarrow{BC} = b\vec{y}_3$ et $\overrightarrow{CD} = c\vec{z}_4$.

- Q1** Tracer les figures de définition des trois angles α , β et θ .
- Q2** Déterminer l'expression générale du vecteur vitesse $\vec{V}(D, 4/1)$.
- Q3** Dans le cas particulier où l'angle β est nul et l'angle θ reste constant, mais non nul, identifier le mouvement particulier du bras 4 par rapport au bâti 1 et interpréter sur une figure tracée dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) le vecteur $\vec{V}(D, 4/1)$ correspondant. Il est demandé pour cette figure de choisir un angle θ positif.
- Q4** Dans le cas particulier où seul l'angle β reste constant et de valeur nulle, calculer le vecteur accélération $\vec{A}(D, 4/1)$.

- Q5** Dans le cas particulier où l'angle θ est nul et les deux angles α et β restent à chaque instant opposés, identifier la nature du mouvement du bras 3 par rapport au bâti 1.
Toujours dans ce cas, déterminer la nouvelle expression de l'accélération $\vec{A}(D, 4/1)$.

CIN_13 Manipulateur à muscles artificiels

On considère un manipulateur représenté partiellement ci-dessous. Il comprend un tronc 0, un bras 1 et un avant-bras 2 :

- le bras 1 est en rotation par rapport à l'axe (O, \vec{z}) et sa position est repérée par l'angle θ ;
- l'avant-bras 2 est en mouvement de rotation par rapport au bras 1 autour de l'axe (A, \vec{z}) et sa position est définie par l'angle φ .

C'est un actionneur à muscles artificiels pneumatiques qui pilote l'articulation du coude.

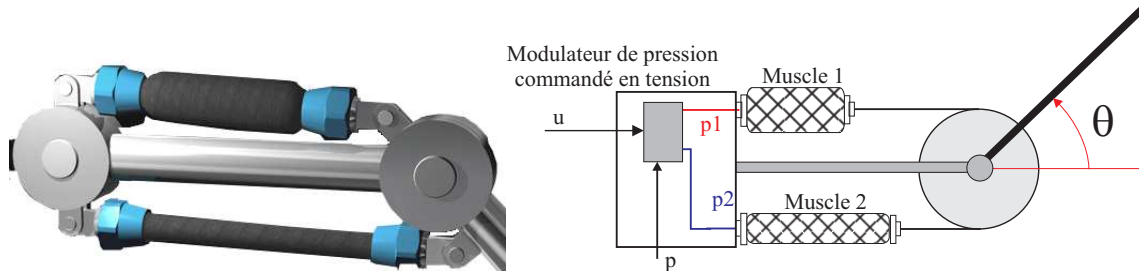


FIGURE 1 – Implantation des muscles artificiels

On pose : $OA = AB = L = 0,5$ m.

- Q1** Définir le vecteur position du point B extrémité de l'avant-bras par rapport à R_0 .
- Q2** Sur la figure 2 ci-dessous, déterminer graphiquement la zone que peut atteindre le point B dans R_0 . On rappelle que par construction : $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
- Q3** Déterminer les deux vecteurs vitesse de rotation : $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(2/1)$
- Q4** Déterminer le vecteur vitesse du point B dans le mouvement 2/0 : $\vec{V}(B, 2/0)$
- Q5** Placer sur la figure de construction graphique le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/0)$ si le bras est dans la position de la figure et que : $\dot{\theta} = 1$ rad/s et $\dot{\varphi} = 2$ rad/s.
- Q6** Déterminer le vecteur accélération du point B dans le mouvement 2/0 : $\vec{A}(B, 2/0)$.

Manipulateur à muscles artificiels

- DOCUMENT RÉPONSE -

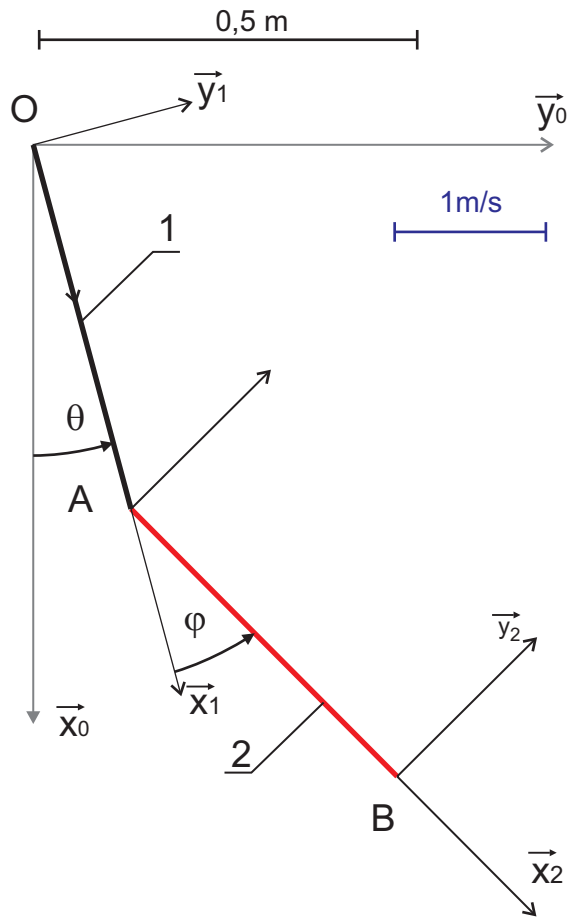


FIGURE 2 – La figure pour les constructions graphiques

CIN_14 Robot de manutention

exo-robot-de-manutention-v2

Le schéma de la figure 1 ci-dessous définit le squelette d'un robot de manutention. Le mécanisme comporte quatre ensembles cinématiques :

- le portique 0 appelé bâti, encastré sur le sol ;
- l'avant-bras 1, en liaison glissière de direction \vec{z}_0 avec le portique ;
- le bras 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec l'avant-bras 1 ;
- le poignet 3, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) avec le bras 2. On suppose la pièce transportée fixe sur le poignet 3 et de point de référence C .

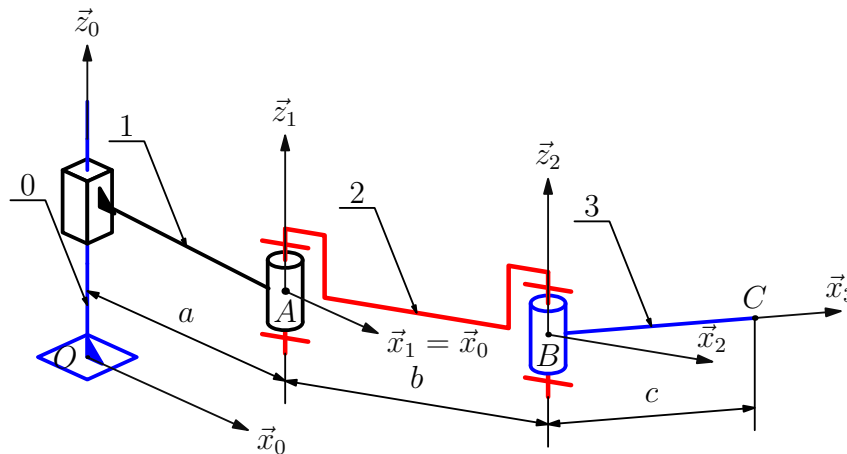


FIGURE 1 – Schéma cinématique du squelette du robot

- Q1** Paramétrer les mouvements relatifs possibles des différentes pièces.
- Q2** Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 1/0)$ en fonction de ces paramètres.
- Q3** Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(C, 3/0)$ en fonction de ces paramètres.
- Q4** Calculer $\vec{A}(C, 3/0)$, vecteur accélération du point C dans le mouvement $3/0$.

CIN_15 Manège

exo-manège-v1

Le but de l'exercice suivant est de vérifier si un manège pour enfants répond aux normes de sécurité : aucun point de l'enfant ne doit pas avoir une vitesse supérieure à 25 km/h et une accélération supérieure à 1,2 g.

Le manège schématisé sur la figure 1 ci-dessous est constitué de quatre groupes de pièces supposées solides et indéformables :

- Le bâti 0, auquel est associé un repère $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- La plate-forme 1 en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) avec le bâti.
On lui associe un repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ et $\overrightarrow{CA} = a\vec{x}_1$, avec $a = 2$ m.
- Le corps du vérin 2 en liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_1) avec la plate-forme 1.
On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et on pose $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \beta$.
- L'ensemble cinématique constitué de la tige du vérin et l'avion est numéroté 3. Il est en liaison glissière de direction \vec{x}_2 avec le corps du vérin 2.
On pose $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x}_2$, avec B le point de référence concernant l'enfant.

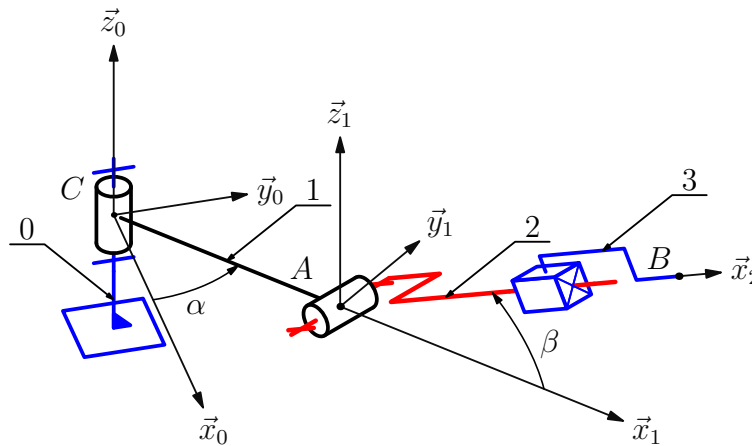


FIGURE 1 – Schéma cinématique du manège

- Q1** Exprimer les éléments de réduction du torseur cinématique décrivant le mouvement 1/0 au point C puis au point A en fonction des paramètres précédemment définis.
- Q2** Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 3/0)$ par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 0 – 1 – 2 – 3.
- Q3** Autre méthode : calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 3/0)$ par dérivation du vecteur position \overrightarrow{CB} , et conclure quant aux qualités et aux limites de ces deux méthodes.
- Q4** Vérifier que le manège répond aux normes de sécurité en vitesse lorsque

$$\begin{array}{lll} \beta = 0 \text{ rad} & \lambda = 5 \text{ m} \\ \dot{\alpha} = 0,5 \text{ rad/s} & \dot{\beta} = 0 \text{ rad/s} & \dot{\lambda} = -0,5 \text{ m/s} \end{array}$$

- Q5** Calculer le vecteur accélération $\vec{A}(B, 3/0)$.

- Q6** Vérifier que le manège répond aux normes de sécurité en accélération lorsque

$$\begin{array}{lll} \beta = 0 \text{ rad} & \lambda = 5 \text{ m} \\ \dot{\alpha} = 0,5 \text{ rad/s} & \dot{\beta} = 0 \text{ rad/s} & \dot{\lambda} = -0,5 \text{ m/s} \\ \ddot{\alpha} = 0,25 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\beta} = 0,6 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\lambda} = -1 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

CIN_16 Robot industriel

exo-robot-industriel-v1

Le schéma de la figure 1 ci-dessous définit la structure simplifiée d'un robot industriel destiné à transporter un objet situé au point M . On pose

- $\overline{CH} = d\vec{x}_1$
- $\overline{HM} = L\vec{y}_2$
- $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$
- $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta$

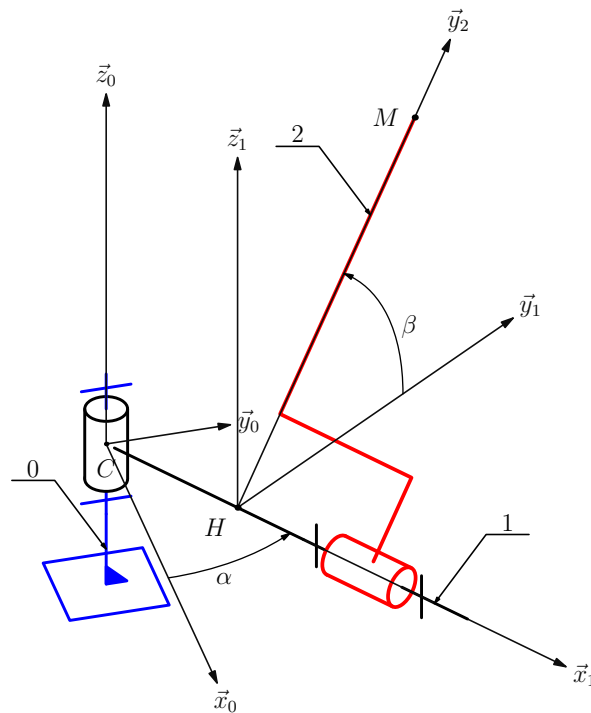


FIGURE 1 – Schéma cinématique du robot industriel

Q1 Montrer la relation suivante

$$\|\vec{V}(M, 2/0)\|^2 = L^2 \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 (d^2 + L^2 \cos^2 \beta) - 2dL\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta$$

On considère le mouvement particulier pour lequel $\dot{\alpha} = \omega_1$ et $\dot{\beta} = \omega_2$, avec les taux de rotation ω_i constants.

Q2 Montrer que, pour certaines configurations géométriques à déterminer, le module de la vitesse $\|\vec{V}(M, 2/0)\|$ passe par un maximum lorsque les angles α et β varient.

Calculer cette vitesse maximale V_{Max} .

Pour un de ses robots, le constructeur a retenu une configuration géométrique telle que $d = 0$, et annonce comme performances cinématiques

En mouvement horizontal	$V_{Max} = 0,6 \text{ m/s}$
En mouvement vertical	$V_{Max} = 0,4 \text{ m/s}$ en montée
	$V_{Max} = 0,6 \text{ m/s}$ en descente

Q3 Exprimer V_{Max} .

Q4 Pour une longueur de bras $L = 1 \text{ m}$, calculer les valeurs des taux de rotation ω_1 et ω_2 afin de respecter les valeurs numériques proposées pour V_{Max} .

CIN_21 Triangle déformable

exo-triangle-déformable-v1

Soit le mécanisme schématisé ci-dessous ; il est composé de trois pièces :

- Au bâti 1 est associé le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
On pose $\overrightarrow{AB} = b\vec{x}_1$.
- À la manivelle 2 est associé le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ de telle sorte que $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$. Cette pièce 2 est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le bâti 1.
On pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, et un point C tel que $\overrightarrow{AC} = a\vec{x}_2$.
- À la pièce 3 est associé le repère $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, avec $\vec{z}_3 = \vec{z}_1$. Cette pièce 3 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec le bâti 1.
On pose $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$.
La pièce 3 est aussi en liaison sphère cylindre avec 2, de centre C_2 et d'axe (B, \vec{x}_3) .
On pose $\delta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ et $\overrightarrow{BC} = x\vec{x}_3$.

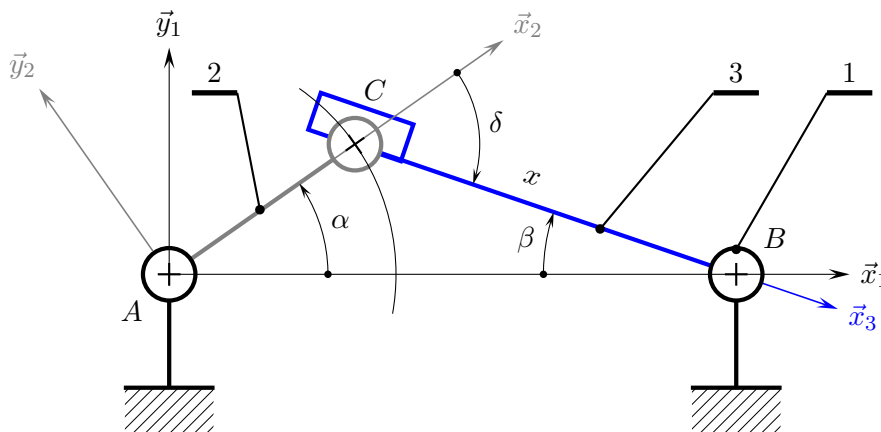


FIGURE 1 – Schéma cinématique du mécanisme

Le problème ainsi posé comporte 4 paramètres dépendant du temps : α , β , δ et x .

- Q1** Montrer que parmi ces 4 paramètres 1 seul est indépendant.
- Q2** Une loi entrée sortie cinématique du mécanisme associant 2 dérivées de ces paramètres parmi ces 4, déterminer le nombre de lois E/S qu'on peut écrire. Présenter sous forme de tableau l'ensemble des solutions possibles de ces associations.
- Q3** Déterminer la loi $f(\dot{x}, x, \dot{\alpha}, \alpha, a, b) = 0$.
- Q4** Déterminer toutes les autres lois entrée-sortie.

CIN_22 Bielle-manivelle

[t1-4.4]

exo-bielle-manivelle-v2

Les mécanismes de transformation de mouvement basés sur une architecture bielle-manivelle sont très nombreux. La figure 1 propose un schéma cinématique de son principe de fonctionnement.

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles :

- Un bâti repéré 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- Une manivelle, repérée 2, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti.
On lui associe un repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$, et on pose d'une part $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d'autre part $\vec{OA} = R\vec{x}_2$.
- Un piston, repéré 4, en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}_1) avec le bâti.
On pose $\vec{OB} = \lambda\vec{x}_1$.
- Une bielle repérée 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec la manivelle 2, et en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec le piston 4.
On pose $\vec{AB} = L\vec{x}_3$.

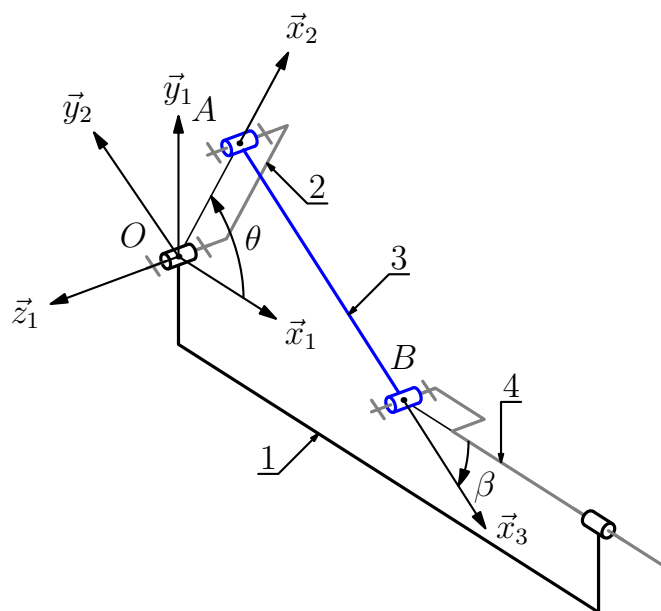


FIGURE 1 – Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle

Le premier objectif de cette étude est de trouver la loi $\dot{\lambda} = f(\dot{\theta})$.



- Q1** Tracer le graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
- Q2** Tracer un schéma cinématique de ce mécanisme dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.
- Q3** Détailler la forme des torseurs cinématiques.
- Q4** Proposer une équation scalaire qui évite les trois inconnues cinématiques que l'on ne souhaite pas voir dans la loi entrée-sortie, et détailler cette équation sous la forme

$$f(\dot{\lambda}, \lambda, \dot{\theta}, \theta) = 0$$

- Q5** L'équation précédente peut-elle être également trouvée par l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse (3/1) ?

- Q6 Intégrer l'équation différentielle obtenue par l'une des deux dernières questions.
- Q7 La figure 2 propose le tracé de la fonction $\frac{\dot{\lambda}}{R\dot{\theta}}$ superposé au tracé de la fonction $-\sin \theta$. Sur le document réponse, interpréter les points remarquables de cette courbe et les mettre en corrélation avec les configurations géométriques correspondantes.

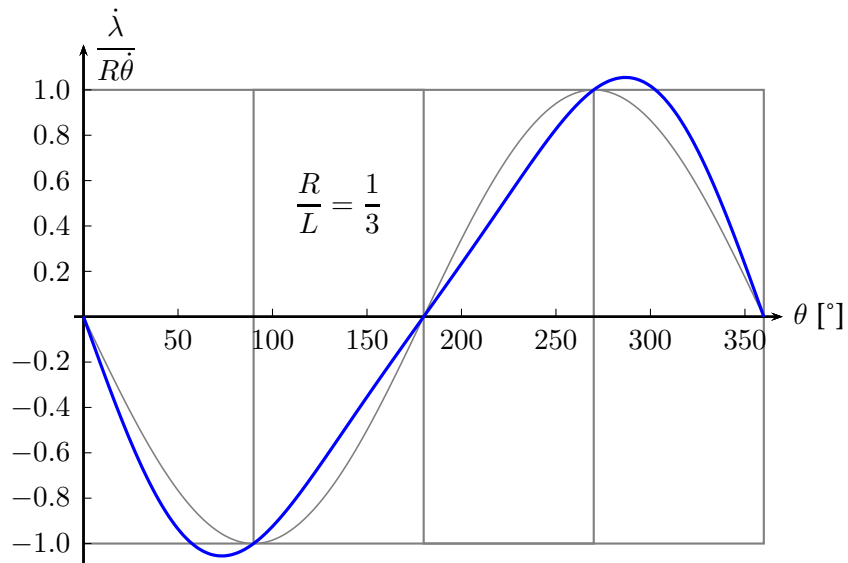


FIGURE 2 – Vitesse du piston $\dot{\lambda}$ pour un tour de manivelle

On se propose maintenant d'émettre un avis sur la structure du mécanisme suivant différentes liaisons possibles.

- Q8 Par une approche globale cinématique, proposer les valeurs des degrés de mobilité et de statisme pour chacun des schémas cinématiques proposés sur le document réponse.

CIN_23 Table élévatrice

[t1-4.3]

exo-table-élévatrice-v1

On s'intéresse à une table élévatrice telle que présentée sur la figure 1 ci-dessous. Son architecture s'appuie sur un quadrilatère déformable. Elle comprend :

- un bâti noté 1 auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\vec{OC} = L_1 \vec{x}_1$;
- un bras motorisé 2, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti 1 :
 - on lui associe un repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en prenant soin de confondre les vecteurs \vec{z}_2 et \vec{z}_1 et on pose d'une part $\alpha_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, d'autre part $\vec{OA} = R_2 \vec{x}_2$;
- une plateforme 3 sur laquelle est posée la charge :
 - cette plateforme est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec le bras motorisé 2 ;
 - on lui associe un repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en prenant soin de confondre les vecteurs \vec{z}_3 et \vec{z}_2 et on pose d'une part $\alpha_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$, d'autre part $\vec{AB} = L_3 \vec{x}_3$.
- une jambe 4 de longueur R_4 , en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti et en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec la plateforme 3.

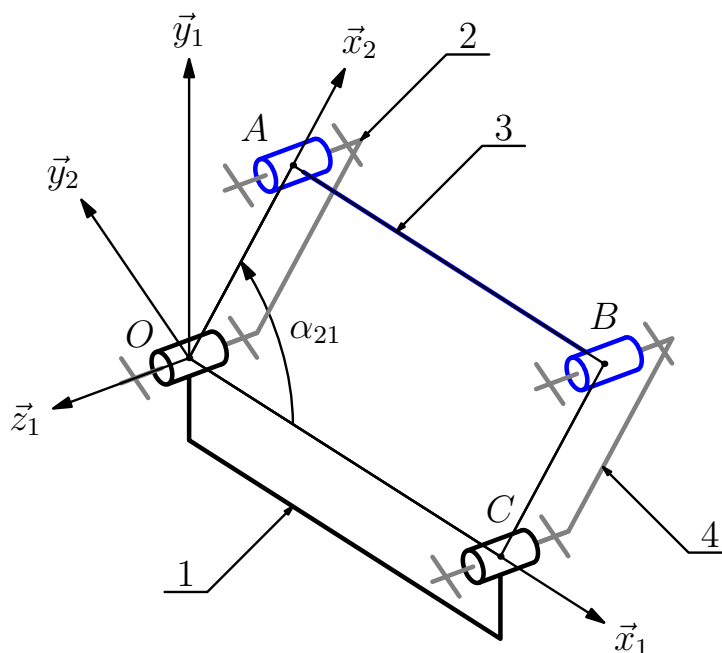


FIGURE 1 – Schéma cinématique d'une table élévatrice

L'objectif de cette étude est de caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 dans le cas particulier où le quadrilatère $(OABC)$ est un parallélogramme.

- Q1** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques.
- Q2** Poser les torseurs cinématiques et tracer les figures de définition des deux angles définis.
- Q3** Déterminer la relation $f(\dot{\alpha}_{32}, \alpha_{32}, \dot{\alpha}_{21}, \alpha_{21}) = 0$.
- Q4** Intégrer cette relation, puis dans le cas particulier où $L_3 = L_1 = L$, $R_4 = R_2 = R$ et $L \neq R$, détailler les mouvements possibles.
- Q5** Caractériser le mouvement de la table 3 par rapport au bâti 1 lorsque $\alpha_{32} = -\alpha_{21}$.

CIN_31 Roue

exo-roue-v2

Le dessin de la figure 1 ci-dessous représente la roue 3 d'un véhicule 2 en contact en I avec un plan π_1 de normale \vec{z}_1 :

- Au sol 1 est attaché le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- On considère le véhicule 2 en liaison glissière de direction \vec{y}_1 avec le sol 1 :
 - À ce solide 2 est attaché un repère $(Q, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
 - On pose $\overrightarrow{CQ} = \lambda \vec{y}_1 + h \vec{z}_1$ ainsi que $\overrightarrow{QA} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1 + c \vec{z}_1$.
- La roue 3 est modélisée par un disque sans épaisseur de rayon R et de centre A :
 - Elle est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_2) avec 2.
 - À ce solide est attaché le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et on pose $(\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \alpha$.

a, b, c, h sont des constantes, λ et α dépendent du temps

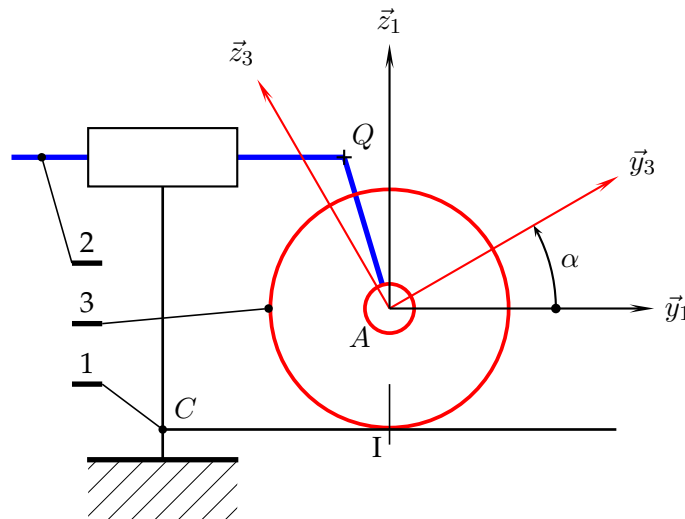


FIGURE 1 – Schéma cinématique de la configuration étudiée

- Q1** Tracer le graphe de structure du mécanisme ainsi modélisé.
- Q2** Écrire l'équation torsorielle traduisant la fermeture du graphe.
- Q3** Pour chaque liaison, proposer, sous forme vectorielle, une expression du torseur cinématique associé.
- Q4** Dédire de ce qui précède, en fonction des données de l'énoncé, l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(I, 3/1)$.

À partir de cette question, on suppose que la roue roule sans glisser sur le plan π_1 .

- Q5** En déduire une relation entre les paramètres cinématiques $\dot{\alpha}$ et $\dot{\lambda}$.

Soit en plus le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}R\vec{z}_3$.

- Q6** Pour $\alpha = \pi/6$, donner l'expression la plus simple de $\vec{V}(M, 3/1)$.
- Q7** Application numérique : on donne $R = 30$ mm et $\|\vec{V}(A, 3/1)\| = 2,7$ m/s. Sur une même figure, tracer les vecteurs $\vec{V}(M, 3/1)$ et $\vec{V}(A, 3/1)$ pour $\alpha = \pi/6$.
- Q8** Énoncer le théorème d'équiprojectivité et le vérifier graphiquement.
- Q9** Tracer une représentation du champ des vecteurs vitesse du mouvement 3/1.
- Q10** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point M dans le mouvement 3/1.

CIN_32 Roue pivotante

Le schéma de la figure 1 ci-dessous représente une roue pivotante 3 en contact au point I avec un plan π_1 de normale \vec{z}_1 :

- Au solide 1 est attaché le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
On définit le point K de 1 par $\vec{CK} = h\vec{z}_1$.
- Au solide 2 est attaché le repère $(K, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, avec $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$.
Cette pièce est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec 1.
On pose $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \gamma$ et $\vec{AK} = d\vec{x}_2$.
- La roue 3 est modélisée par un disque sans épaisseur de rayon R et de centre A , en contact au point I avec le plan π_1 .
Elle est en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_2) avec 2, et on lui attache le repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, avec $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$.
On pose $(\vec{y}_2, \vec{y}_3) = \alpha$.
Soit M le point géométrique désignant le milieu du segment $[AI]$.

R, h et d sont des constantes, γ et α dépendent du temps

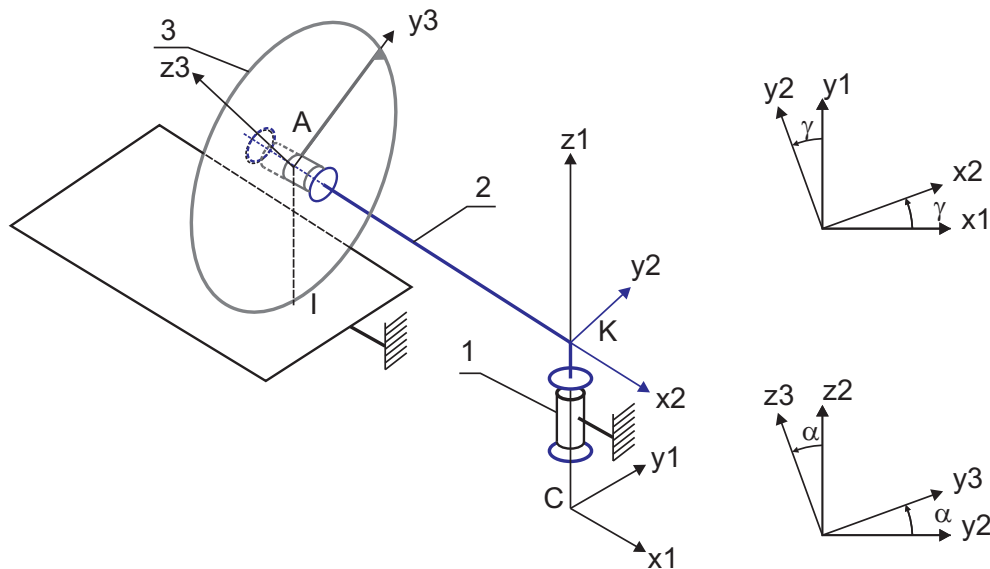


FIGURE 1 – Schéma cinématique du modèle étudié

- Q1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.
- Q2** Pour chaque liaison, proposer, sous forme vectorielle, une expression de son torseur cinématique.
- Q3** Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{V}(M, 3/2)$, $\vec{V}(M, 2/1)$ et $\vec{V}(M, 3/1)$ en exploitant la chaîne ouverte 1 – 2 – 3.
- Q4** Écrire la fermeture torsorielle de la chaîne fermée.
- Q5** En déduire l'expression de $\vec{V}(I, 3/1)$.

À partir de cette question, on suppose que la roue 3 roule sans glisser sur le plan π_1 .

- Q6** Trouver une relation entre les paramètres cinématiques.
- Q7** En déduire l'axe central du torseur cinématique du mouvement 3/1.

CIN_33 Roues pivotantes

exo-roues-pivotantes-v1

Cet exercice complète l'exercice précédent.

Le dessin de la figure CIN_33 ci-dessous représente un ensemble de deux roues pivotantes 3 et 4 en contact respectivement en I et J avec un solide 1 initialement représenté par le plan π_1 de normale \vec{z}_1 . Les roues sont modélisées par deux disques sans épaisseur de rayon R et de centres respectifs A et B .

Le paramétrage de l'exercice précédent est à reprendre, complété par :

- la longueur du segment BA est supposée égale à e ;
- on pose $(\vec{y}_2, \vec{y}_4) = \beta$.

Les paramètres R , e , h et d sont constants, γ , α et β dépendent du temps.

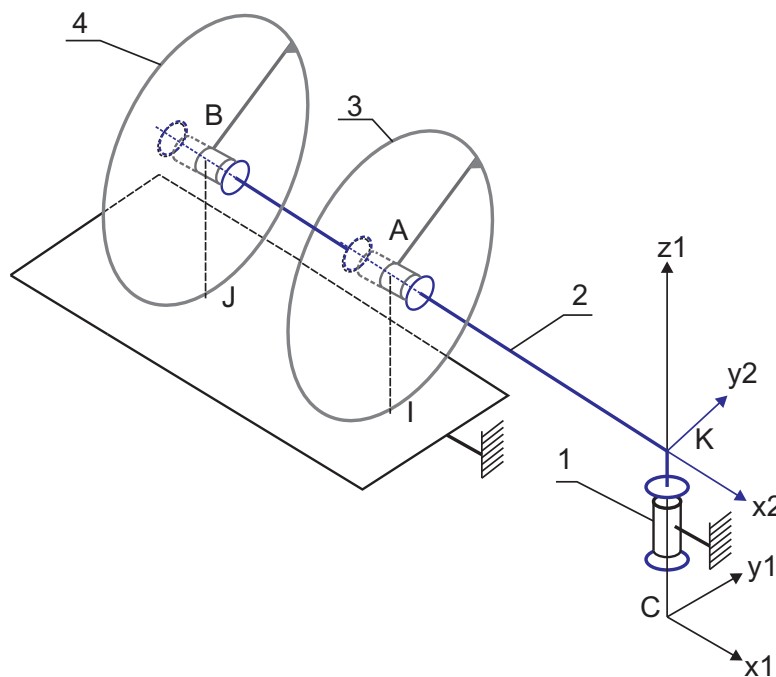


FIGURE 1 – Schéma cinématique du dispositif initial

Dans tout ce qui suit, on suppose que les roues 3 et 4 roulent sans glisser sur le solide 1.

- Q1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.
- Q2** Pour chaque liaison, proposer, sous forme vectorielle, une expression de son torseur cinématique.
- Q3** Trouver une relation entre les paramètres cinématiques $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

On souhaite à présent modifier le mécanisme afin que les rayons des deux roues, respectivement R_3 et R_4 puissent être différents.

- Q4** Quelle(s) modification(s) du mécanisme (et de son paramétrage) peut-on proposer afin que les roues restent en contact avec le solide 1 au cours du mouvement de 2 autour de l'axe initial (C, \vec{z}_1) ?
Faire un schéma et préciser le paramétrage.
- Q5** Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) doit remplir le nouveau mécanisme afin que l'on ait constamment la relation $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$?
À quoi correspond cette hypothèse ?

CIN_34 Segway

On s'intéresse au comportement d'un gyropode de type SEGWAY ¹ lors d'un virage.

On considère le mécanisme réduit à :

- un châssis 2, dont l'inclinaison par rapport à la verticale terrestre \vec{z}_1 reste constante ;
- une roue motrice droite 3 en rotation par rapport au châssis 2 autour de l'axe (A, \vec{x}_2) et dont la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(3/2) = \omega_d \vec{x}_2$ est générée par le moteur droit ;
- une roue motrice gauche 4 en rotation par rapport au châssis 2 autour de l'axe (B, \vec{x}_2) et dont la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(4/2) = \omega_g \vec{x}_2$ est générée par le moteur gauche.

Les deux roues motrices 3 et 4 sont supposées rouler sans glisser sur le sol 1 aux points de contact respectifs K et J .

On donne $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} = a\vec{x}_2$, $AK = BJ = R$.

$$R = 0,2 \text{ m} \quad a = 0,5 \text{ m} \quad \omega_d = \pi \text{ rad/s} \quad \omega_g = \frac{3}{2}\pi \text{ rad/s}$$

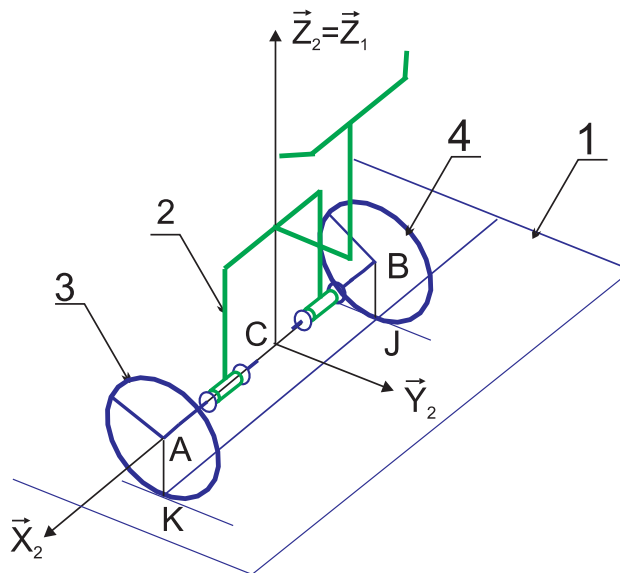


FIGURE 1 – Schéma cinématique du SEGWAY

Objectif : caractériser le mouvement du châssis par rapport au sol.

Q1 Justifier la forme proposée ci-dessous pour le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_1 \\ \vec{V}(C, 2/1) \perp \vec{z}_1 \end{cases}$$

On s'intéresse à la roue droite.

Q2 Exprimer le vecteur $\vec{\Omega}(3/1)$ en fonction des variables données.

Q3 Exprimer le vecteur $\vec{V}(A, 3/1)$ en exploitant le roulement sans glissement de la roue droite sur le sol.

1. Équipé de cinq gyroscopes et de deux capteurs chargés de déterminer la position du Segway par rapport à son axe de gravité, il n'avance que si l'utilisateur se penche; plus il se penche, plus le Segway va vite. Quand l'utilisateur se penche légèrement en arrière, le Segway ralentit, s'arrête et même recule. En cas d'obstacle, il est plus facile encore de faire demi-tour sur place en actionnant la poignée gauche qui sert à diriger l'engin. Doté de trois microprocesseurs et de batteries dernier cri, le Segway a une autonomie de plus de 25 kilomètres. Sa pleine recharge prend trois heures, mais il peut déjà repartir au bout d'une heure.

Q4 En déduire $\vec{V}(A, 2/1)$ (équ.1)

On s'intéresse à la roue gauche.

Q5 Exprimer le vecteur $\vec{V}(B, 4/1)$ et en déduire $\vec{V}(B, 2/1)$ (équ.2)

On s'intéresse au mouvement du châssis par rapport au sol.

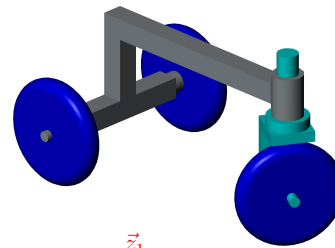
Q6 Résoudre les deux équations (1) et (2) puis déterminer le torseur $\mathcal{V}(2/1)$.

Q7 Calculer le vecteur accélération $\vec{A}(C, 2/1)$.

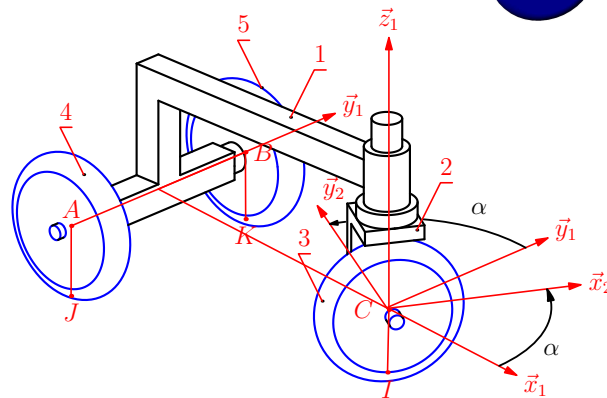
CIN_35 Chariot filoguidé

exo-chariot-filoguide-v1

Le chariot filoguidé étudié comprend un châssis 1, une roue motrice et directrice 3 montée sur une fourche 2, deux roues porteuses 4 et 5, un dispositif de suivi de fil, un moto réducteur pour la traction et un moto-réducteur pour les changements de direction.



La roue motrice et directrice 3 est entraînée en rotation par rapport à la fourche à la fréquence N_{32} . La fourche est entraînée en rotation par rapport au châssis 1, sa position étant caractérisée par l'angle de braquage α . Le dispositif de suivi de fil permet au chariot de suivre un fil conducteur placé sur le sol.



Hypothèses :

- Le mouvement du châssis par rapport au sol est plan ; on peut lui associer le torseur cinématique suivant :

$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{cases} \omega_{10} \vec{z}_1 \\ \vec{V}(C, 1/0) \end{cases} \quad \text{où : } \vec{V}(C, 1/0) \text{ et } \omega_{10} \text{ sont des inconnues} \\ \text{avec : } \vec{V}(C, 1/0) \cdot \vec{z} = 0$$

- La fourche est immobilisée par rapport au châssis dans la position de braquage maximum : $\alpha = 60^\circ$,
- Les roues roulent sans glisser sur le plan horizontal, en I, J et K.
- Le moteur de traction entraîne la roue 3 en rotation par rapport à la fourche à la fréquence N_{32} .

Les vitesses de rotation des roues porteuses par rapport au châssis ω_{41} et ω_{51} sont inconnues.

$$\vec{AC} = L\vec{x}_1 + a\vec{y}_1 ; \vec{BC} = L\vec{x}_1 - a\vec{y}_1 ; a = 0,4\text{m} ; L = 1\text{m} ; \text{rayon de roue } R = 0,1\text{ m} ; N_{32} = 40\text{tr/mn}$$

Les objectifs sont : déterminer la vitesse $\vec{V}(C, 1/0)$, ω_{10} , ω_{32} , ω_{41} et ω_{51} ainsi que le rayon du plus petit cercle à l'intérieur duquel le chariot peut évoluer.

Q1 Roue motrice et directrice 3 :

- Déterminer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}(3/2)$
- Déduire des hypothèses l'expression du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(3/0)$ en fonction de ω_{10} et ω_{32} .
- Déterminer le vecteur $\vec{V}(I, 3/0)$.

(d) En déduire l'expression de $\vec{V}(C, 3/0)$ puis de $\vec{V}(C, 1/0)$ en fonction de ω_{32} et de la géométrie du chariot.

Calculer le module de la vitesse $\vec{V}(C, 1/0)$.

Q2 Roue porteuse 4 :

(a) Déduire des hypothèses l'expression du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(4/0)$ en fonction de ω_{10} et ω_{41} .

(b) Déterminer le vecteur $\vec{V}(J, 4/0)$.

(c) En déduire l'expression de $\vec{V}(A, 4/0)$ puis de $\vec{V}(A, 1/0)$ en fonction de ω_{41} et de la géométrie du chariot.

Q3 Roue porteuse 5 : résultats à déduire de la question précédente.

(a) Déterminer l'expression de $\vec{V}(B, 5/0)$ puis de $\vec{V}(B, 1/0)$ en fonction de ω_{51} et de la géométrie du chariot.

Q4 Champ des vitesses $\mathcal{V}(1/0)$:

(a) Utiliser les équations vectorielles liant les vitesses $\vec{V}(C, 1/0)$, $\vec{V}(A, 1/0)$ et $\vec{V}(B, 1/0)$ pour déterminer ω_{10} , ω_{41} et ω_{51} .

(b) Faire l'application numérique.

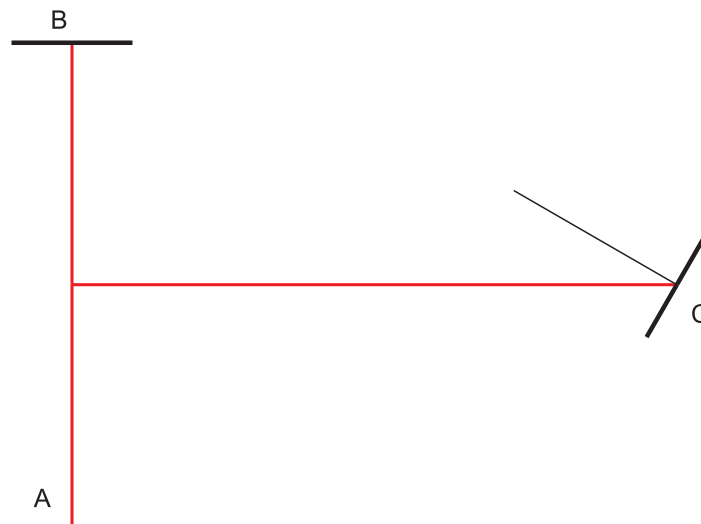
Q5 Étude de la zone balayée en virage : on étudie graphiquement le champ des vitesses $\mathcal{V}(1/0)$.

(a) Mettre en place sur le dessin à l'échelle la vitesse $\vec{V}(C, 1/0)$ ainsi que les directions des vitesses $\vec{V}(A, 1/0)$ et $\vec{V}(B, 1/0)$.

(b) Déterminer le C.I.R. du mouvement 1/0 ; en déduire le rayon du cercle à l'intérieur évolueront les points de contact des roues avec le sol lors du virage étudié.

(c) Proposer une expression littérale de ce rayon r_{mini} si en phase de conception les dimensions a et L ainsi que l'angle n'étaient pas encore choisis.

Épure pour construction graphique

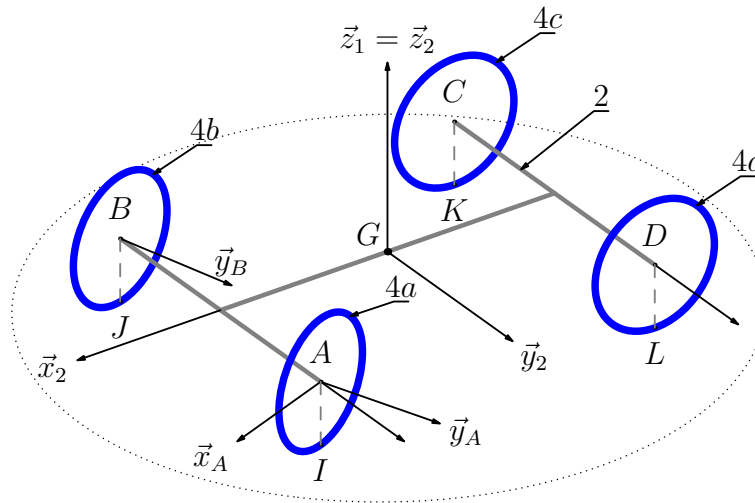


CIN_36 Comportement d'un véhicule en virage

[t1-3.7]

pub-virage-vehicule-v2

On s'intéresse au véhicule à quatre roues schématisé sur la figure ci-dessous :



- le véhicule est posé sur un sol horizontal repéré 1, de normale orientée par le vecteur \vec{z}_1 ascendant ;
- le châssis est modélisé par un rectangle horizontal $(ABCD)$, de centre géométrique G . On lui associe un repère $(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, avec \vec{z}_2 vertical ascendant et \vec{x}_2 orientant la marche avant du véhicule. On pose

$$\begin{aligned} \vec{GA} &= L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 & \vec{GD} &= -L\vec{x}_2 + a\vec{y}_2 \\ \vec{GB} &= L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2 & \vec{GC} &= -L\vec{x}_2 - a\vec{y}_2 \end{aligned}$$

Le châssis reste horizontal au cours du temps. Il est donc en mouvement plan par rapport au sol 1 et on pose

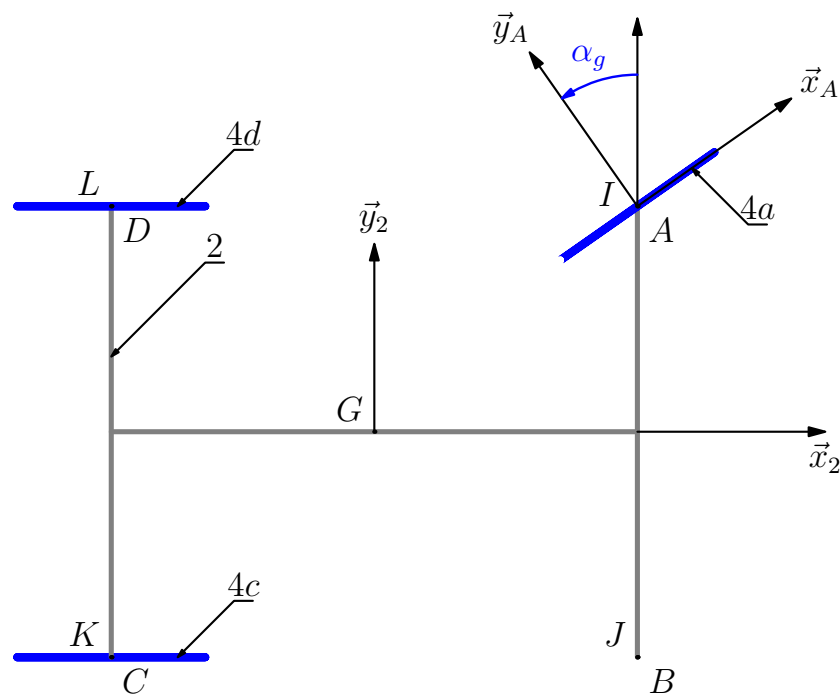
$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21} \vec{z}_2 \\ V_x \vec{x}_2 + V_y \vec{y}_2 \end{cases}$$

- les roues sont modélisées par quatre disques de même rayon R définis dans des plans verticaux. Les axes de révolution sont ainsi dans le plan du châssis 2.
 - les mouvements principaux des roues par rapport au châssis 2 sont des rotations autour de leurs axes de révolution ;
 - les deux roues arrières 4c et 4d ont le même axe de révolution $(C, \vec{y}_2) = (D, \vec{y}_2)$;
 - la roue avant gauche 4a admet la droite (A, \vec{y}_A) comme axe de révolution : cet axe est confondu avec (A, \vec{y}_2) en ligne droite et tourne autour de l'axe (A, \vec{z}_2) d'un angle α_g en virage. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_{4a}, \vec{y}_A, \vec{z}_{4a})$ et on appelle β_g l'angle $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4a})$;
 - la roue avant droite 4b admet (B, \vec{y}_B) comme axe de révolution : cet axe est confondu avec la droite (B, \vec{y}_2) en ligne droite et tourne autour de l'axe (B, \vec{z}_2) d'un angle α_d en virage. On lui associe un repère $(B, \vec{x}_{4b}, \vec{y}_B, \vec{z}_{4b})$ et on appelle β_d l'angle $(\vec{z}_2, \vec{z}_{4b})$;
 - les quatre roues 4a, 4b, 4c et 4d sont en contact avec le sol 1 respectivement aux points I, J, K et L ;
 - les roues roulent sans glisser sur le sol, ce qui se traduit par un vecteur vitesse nul au point de contact dans le mouvement relatif de la roue concernée et du sol.

Q1 Tracer les figures de définition des angles α_g et β_g , puis déterminer les éléments de réduction au point A du torseur $\mathcal{V}(4a/2)$.

Q2 Exploiter la définition du roulement sans glissement donnée pour calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 4a/1)$, puis le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 2/1)$.

- Q3** En exploitant et généralisant le résultat de la question précédente, tracer sur la figure du document réponse les directions des vecteurs vitesses $\vec{V}(A, 2/1)$, $\vec{V}(C, 2/1)$ et $\vec{V}(D, 2/1)$.
- Q4** Déterminer la position du Centre Instantané de Rotation I_{21} du mouvement 2/1.
- Q5** Mettre en place la direction du vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$ qui soit compatible avec le CIR I_{21} , puis proposer quatre vecteurs vitesse compatibles avec le mouvement 2/1.
- Q6** Déterminer la relation entre α_g et α_d en fonction de a et L .
- Q7** APPLICATIONS NUMÉRIQUES : Un constructeur annonce parmi les caractéristiques d'un de ses véhicules :
- une voie $2a = 1520$ mm ;
 - un empattement $2L = 2850$ mm ;
 - un angle de braquage maximum en virage à gauche et en marche avant de $\alpha_{gMAX} = 43^\circ$;
 - un demi-tour possible entre deux trottoirs parallèles distants de 11,6 m.
- Déterminer l'angle α_d correspondant.
Vérifier la quatrième proposition.



CIN_37 Mouvement d'une bille dans un roulement à billes

exo-roulement-a-billes-v1

On s'intéresse au cours de cet exercice au mouvement d'une bille dans un roulement à billes.

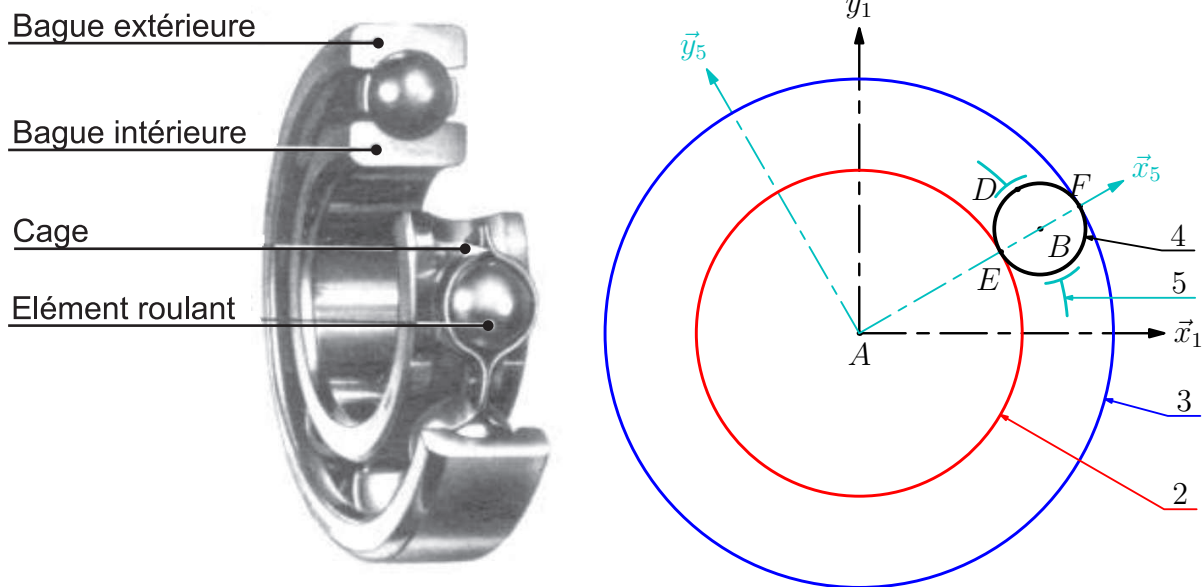


FIGURE 1 – Schéma de principe d'un roulement à billes

Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au bâti (1) non représenté :

- Par un montage non précisé, les deux bagues (2) et (3) ont un mouvement de rotation d'axe (A, \vec{z}_1) par rapport au bâti (1). On note $\vec{\Omega}(2/1) = \omega_{21} \vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}(3/1) = \omega_{31} \vec{z}_1$ (les vitesses angulaires ω_{21} et ω_{31} sont connues).
- La bille (4), de centre B et de diamètre $(R_3 - R_2)$, roule sans glisser en E avec la bague intérieure (2) et en F avec la bague extérieure (3).
- La cage (5), qui positionne les billes, a un mouvement de rotation d'axe (A, \vec{z}_1) par rapport au bâti (1).

Soit $R_5(A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_1)$ un repère lié à la cage (5) tel que \vec{x}_5 soit le vecteur unitaire de \overrightarrow{AB} .

On note $\overrightarrow{AE} = R_2 \vec{x}_5$ et $\overrightarrow{AF} = R_3 \vec{x}_5$.

- Q1** Traduire sous forme mathématique toutes les particularités des mouvements.
- Q2** Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}(E, 2/1)$ et $\vec{V}(F, 3/1)$ en fonction de ω_{21} , ω_{31} , R_2 et R_3 .
- Q3** Déterminer les vecteurs vitesses $\vec{V}(E, 4/1)$ et $\vec{V}(F, 4/1)$, en déduire le torseur cinématique, au point B , du mouvement de la bille par rapport au bâti, en fonction de ω_{21} , ω_{31} , R_2 et R_3 .
- Montrer qu'il y a un mouvement de pivotement possible.
- Q4** Déterminer la vitesse angulaire ω_5 en fonction de ω_{21} , ω_{31} , R_2 et R_3 .
- Q5** En supposant que le pivotement est nul, déterminer, en fonction de ω_{21} , ω_{31} , R_2 et R_3 , la vitesse de glissement de la bille par rapport à la cage au point D tel que

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(R_3 - R_2)\vec{y}_5$$

- Q6** Afin de déterminer la force centripète exercée par la bague extérieure sur la bille, déterminer l'accélération du point B dans le mouvement $4/1$: $\vec{A}(B, 4/1)$

CIN_41 Identification de liaisons

[t1-4.2]

pub-identification-v1

On considère deux ensembles indéformables en contact. La figure 1 ci-dessous positionne cinq points de contact envisagés et leurs normales respectives dessinées par cinq flèches.

On suppose ces contacts conservés dans le temps.

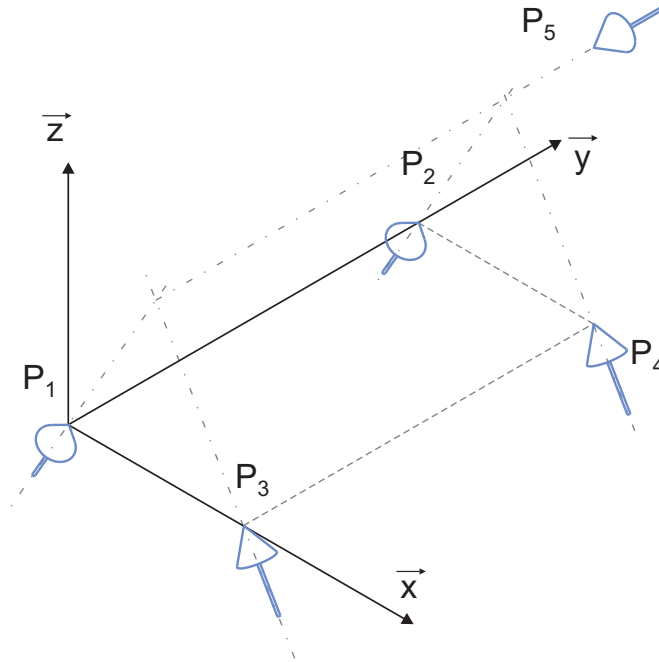


FIGURE 1 – Cinq points de contacts et leurs normales

En fonction de la géométrie constatée et lorsque cela est possible, proposer les noms des liaisons usuelles que matérialisent les points de contact considérés.

Points de contact	Liaison usuelle
$\{P_1, P_3\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$	
$\{P_2, P_3\}$	
$\{P_3, P_4\}$	
$\{P_1, P_2, P_5\}$	
$\{P_1, P_3, P_5\}$	
$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$	

CIN_42 Meule à grains

[t1-4.7]

pub-meule-a-grains-v1

Nos ancêtres utilisaient pour moudre le grain des meules en pierre entraînées en rotation par des animaux. La figure 1 ci-dessous présente un tel dispositif.

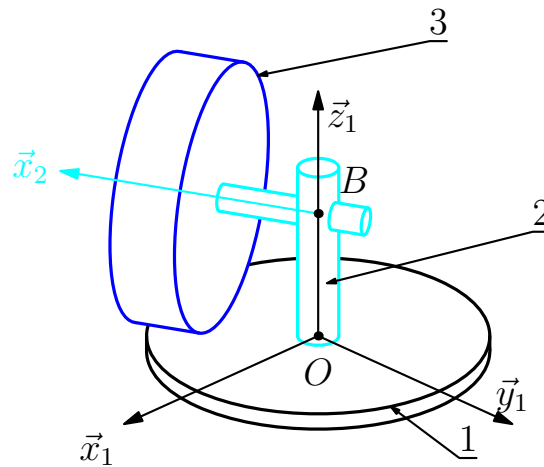


FIGURE 1 – Meule à grains : schéma de principe

On décrit le mécanisme par trois ensembles :

- le sol, plan horizontal repéré 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec \vec{z}_1 orientant la verticale ascendante et O un point du plan ;
- un chariot 2, en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_1) avec le sol. On choisit un point B tel que $\vec{OB} = z \vec{z}_1$ et on associe au chariot un repère $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en prenant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$. On pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.
- la meule en pierre repérée 3, en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_2) avec le chariot 2. Cette meule est cylindrique de révolution, de rayon R et en contact avec le sol suivant un segment $[J, K]$ dont un point courant I est paramétré par $\vec{OI} = \lambda \vec{x}_2$. On associe à la meule un repère $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, en prenant $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$. On pose $\beta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

L'objectif de cette étude est de caractériser le comportement cinématique au niveau du segment de contact entre la meule et le sol.

- Q1** Tracer un graphe des liaisons et dénombrer les inconnues cinématiques.
- Q2** Proposer un schéma cinématique
- Q3** Par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1–2–3, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(I, 3/1)$.
- Q4** Le vecteur vitesse $\vec{V}(I, 3/1)$ trouvé à la question précédente est-il compatible avec le contact meule-sol ?
- Q5** Le roulement sans glissement au point I dans le mouvement de la meule par rapport au sol est-il possible ?
- Q6** En déduire l'intérêt de ce dispositif d'un point de vue cinématique.

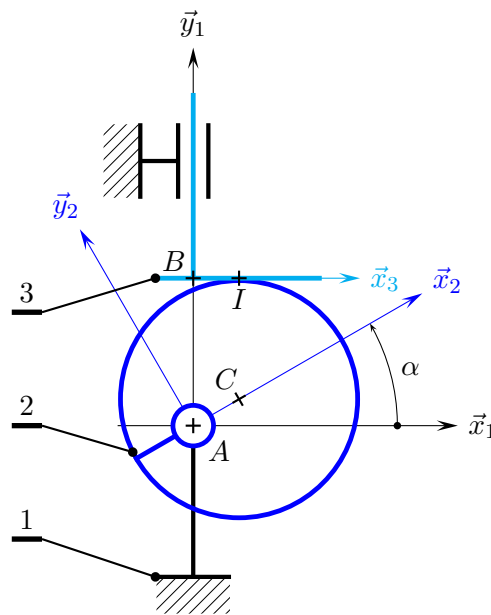
CIN_43 Mécanisme à excentrique

[e1.8>t1-4.8]

pub-excentrique-v1

On considère le mécanisme à excentrique schématisé ci-dessous, que l'on étudie en mouvement plan. Il comprend trois solides :

- un bâti 1, auquel est associé un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
 - un excentrique 2, en liaison pivot d'axe la droite (A, \vec{z}_1) avec le bâti. On lui associe une base $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$, puis on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et $\overrightarrow{AC} = e \vec{x}_2$. Cet excentrique comporte dans le plan $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ un cercle de centre C et de rayon R ;
 - un piston 3, en liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bâti 1. La rotation possible n'est pas exploitée dans cet exercice et on lui associe alors une base 3 confondue avec la base 1.
- Ce piston comporte une droite (B, \vec{x}_3) en contact avec l'excentrique en un point I .



- Q1** Tracer le graphe de structure, et dénombrer les mouvements de solides envisageables.
- Q2** Caractériser graphiquement les vecteurs vitesse $\vec{V}(I, 3/1)$, $\vec{V}(I, 2/1)$ et $\vec{V}(I, 2/3)$.
- Q3** Préciser les trajectoires des points I dans chacun des mouvements énoncés, à savoir 3/1, 2/1 et 2/3.

On s'intéresse maintenant au point géométrique I qui suit le contact au cours du temps.

- Q4** Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(I/1)$.

CIN_44 Pompe oscillante

La pompe oscillante, dont le dessin est donné ci-dessous, a la particularité de fonctionner sans clapet anti-retour pour pomper le fluide passant dans la chambre à volume variable.

- L'arbre d'entrée (2) relié à un moteur tourne à la vitesse ω autour de l'axe par rapport au bâti (1).
- La pièce (2) est munie d'un cylindre excentré d'excentricité AB qui permet d'entraîner le piston (3).
- Le mouvement 3/2 est une rotation autour de l'axe (B, \vec{z}_1) .
- La translation d'axe BC du piston (3) dans le bloc oscillant (4) permet la rotation, par rapport au bâti (1), du bloc oscillant (4) autour de l'axe . Le volume déformable de la chambre est obtenu par le déplacement relatif du piston (3) par rapport au bloc oscillant (4), la vitesse de translation sera notée V . La position angulaire du bloc oscillant (4) permet de raccorder la chambre à volume variable à l'admission ou au refoulement.

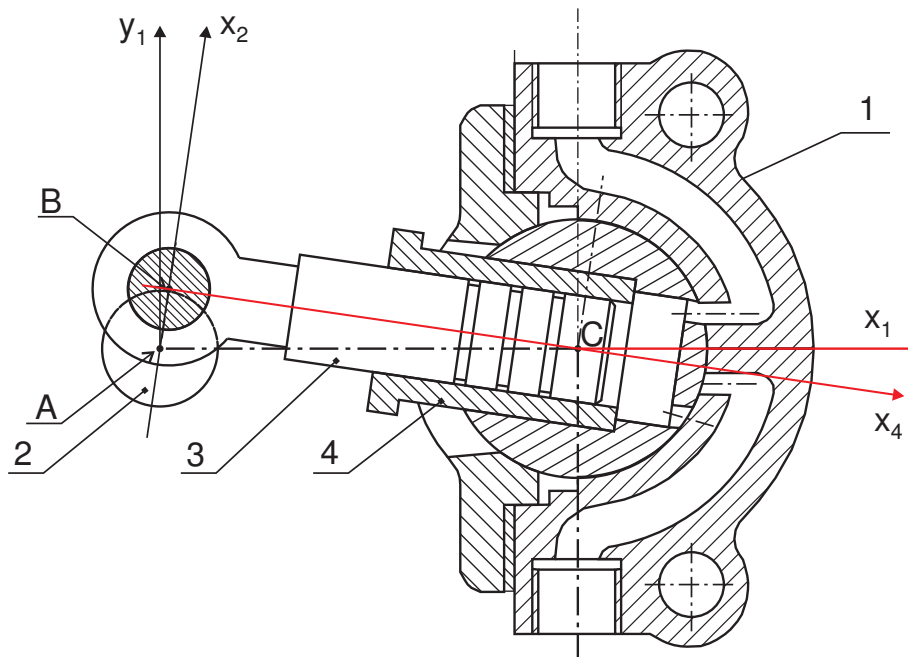


FIGURE 1 – Dessin d'ensemble de la pompe oscillante

Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ le repère lié au corps (1) de la pompe.

On note la distance $AB = b$, la distance $AC = c$, l'angle $(AC, AB) = \alpha$ et l'angle $(CA, CB) = \beta$.

- Q1** Repérer les mouvements possibles entre les différentes pièces.
- Q2** Représenter le graphe des liaisons.
- Q3** Proposer une modélisation des liaisons.
- Q4** Représenter le schéma cinématique.
- Q5** Définir un repère local associé à chaque liaison.
- Q6** Paramétrer les déplacements relatifs possibles.
- Q7** Écrire la relation reliant les vitesses d'entrée et de sortie en fonction de différents paramètres.
- Q8** Écrire les relations reliant les paramètres de positions.
- Q9** Écrire la relation reliant les vitesses d'entrée et de sortie en fonction du paramètre d'entrée.

CIN_45 Pompe à débit variable

[e1.14]

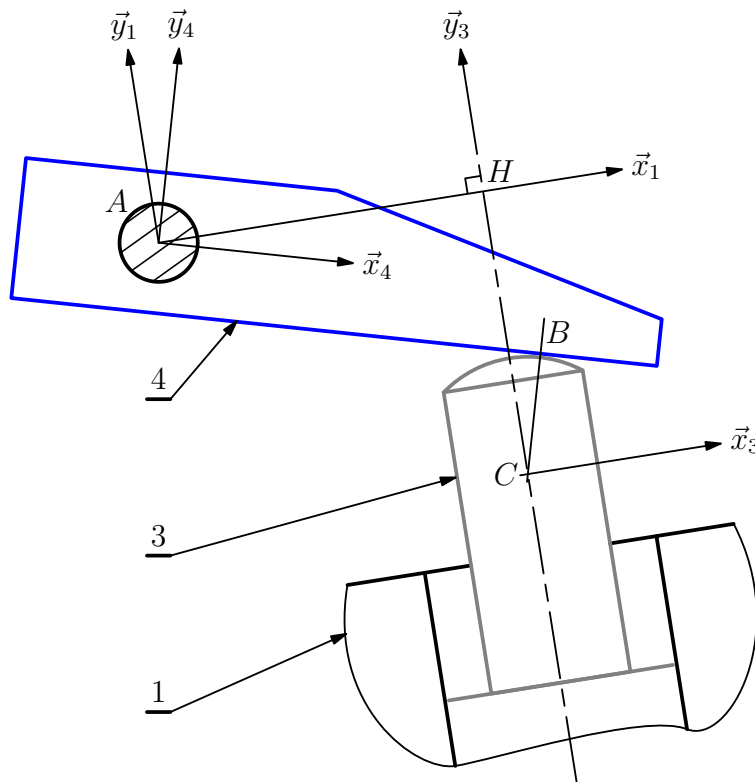
pub-pompe-debit-variable-v1

Le mécanisme de transformation de mouvement représenté ci-dessous, extrait d'une pompe à débit variable, se compose de trois pièces :

- un bâti 1 auquel est associé le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
— on pose $\vec{AH} = d\vec{x}_1$,
- un levier 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1 ;
— on lui associe le repère $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_1)$ et on pose $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$,
- un piston 3 ;
— en liaison pivot glissant d'axe (H, \vec{y}_1) avec le bâti 1 ; on pose $\vec{HC} = \lambda\vec{y}_3$,
— en liaison sphère plan de centre C et de normale \vec{y}_4 avec le levier 4.

Si nécessaire :

- on repère le point géométrique de contact entre 3 et 4 par le vecteur $\vec{AB} = -e\vec{y}_4 + \mu\vec{x}_4$;
- on pose $\vec{CB} = R\vec{y}_4$.



- Q1** Tracer le graphe de liaison du mécanisme.
- Q2** Écrire les différents torseurs cinématiques et représenter la figure de changement de bases pour l'angle δ .
- Q3** Dénombrer les inconnues cinématiques et les équations à disposition.
- Q4** Déterminer la loi cinématique d'entrée-sortie du mécanisme sous la forme

$$\dot{\lambda} = f(\dot{\delta}, \delta, d, e, R)$$

CIN_51 Engrenage

[e1.10>t1-4.5]

exo-engrenage-v2

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme engrenage à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle deux cercles respectivement de rayon R_2 et R_3 et de centres A et B sont tangents au point I .

On suppose que le contact en I est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

- Q1 Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
- Q2 Tracer le graphe de liaison.
- Q3 Exprimer le non-glissement au point I .
- Q4 Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des deux liaisons pivot.

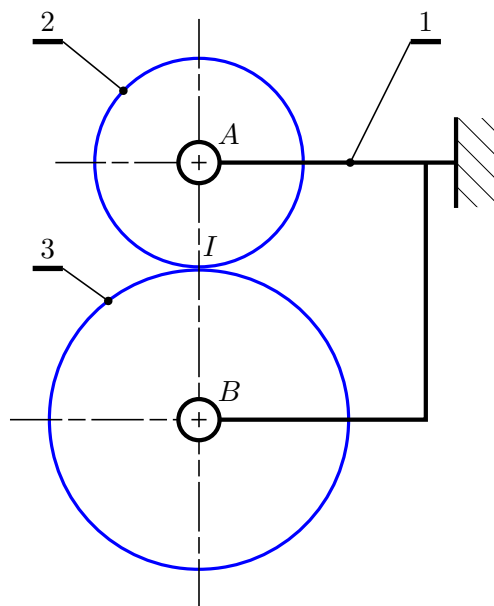


FIGURE 1 – Épure plane d'un mécanisme engrenage

La transformation de mouvement obtenue par un engrenage comprenant deux roues dentées ou pignons ayant pour nombres de dents Z_2 et Z_3 est analogue au roulement sans glissement de deux cylindres de révolution à axes parallèles de diamètres D_2 et D_3 avec $D_2 = m Z_2$ et $D_3 = m Z_3$; pour que deux roues dentées puissent engrener, il faut que les dents aient une même "épaisseur", ce que traduit le module m de cet engrenage. On a donc à chaque instant le rapport

$$\frac{D_2}{D_3} = \frac{Z_2}{Z_3}$$

- Q5 Dédire de l'étude précédente un théorème permettant de déterminer rapidement le rapport de transmission d'un engrenage.

CIN_52 Train d'engrenages

On considère le train d'engrenages schématisé ci-dessous :

- le pignon d'entrée 2 a 15 dents ;
- l'arbre intermédiaire 3 comporte un pignon de 45 dents et un pignon de 10 dents ;
- la couronne 4 a 65 dents.

exo-train-engrenages-v1

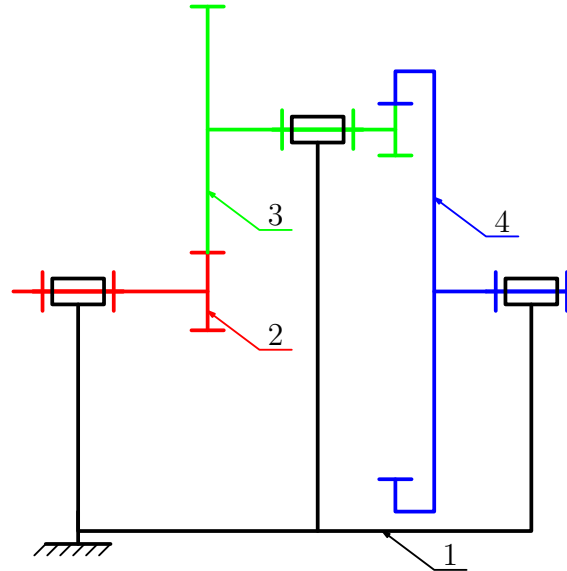


FIGURE 1 – Schéma cinématique d'un train d'engrenages

- Q1** Déterminer le rapport de transmission ω_{41}/ω_{21} du mécanisme étudié.
- Q2** À quelle condition les axes des arbres moteur et récepteur sont-ils confondus ?

CIN_53 Train épicycloïdal

[t1-4.10]

exo-train-epicycloidal-v2

La figure 1 ci-dessous propose le schéma cinématique d'un train épicycloïdal sous une forme très générale. Ce mécanisme comprend :

- un bâti 0 auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- un planétaire 1, muni d'un pignon de Z_1 dents, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti ;
- un porte satellite 2, sur lequel on pose $\vec{AB} = R\vec{y}_2$. Il est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti ;
- une couronne 3 de Z_3 dents, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) avec le bâti ;
- un ou plusieurs satellites 4 de Z_4 dents, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) avec le porte-satellite 2. Le satellite représenté engrène avec le planétaire au point I et avec la couronne au point K .

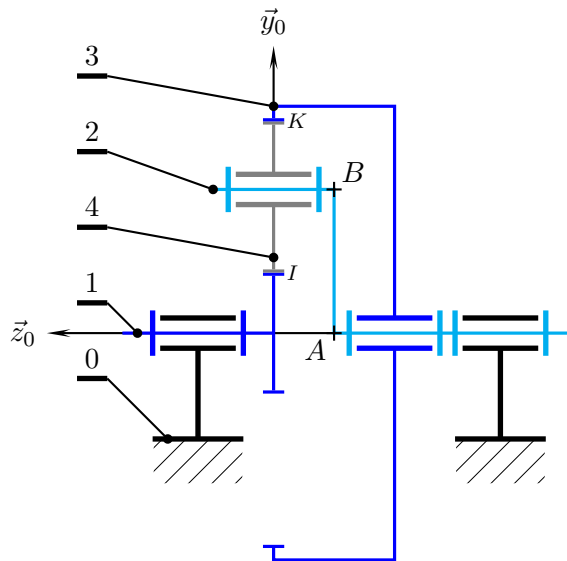
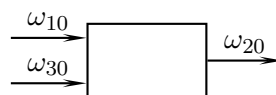


FIGURE 1 – Structure d'un train épicycloïdal

Ce mécanisme comporte dans cette configuration trois entrées-sorties, et est utilisé en pilotant deux entrées, par exemple ω_{10} et ω_{30} .



- Q1** Tracer en vue de gauche, donc dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$:
- les cercles primitifs du planétaire et de la couronne ;
 - en filigrane le cercle primitif d'un satellite dans le cas particulier initial où $\vec{y}_2 = \vec{y}_0$;
 - ce même cercle primitif en supposant d'une part que le planétaire a tourné par rapport au bâti dans le sens positif, d'autre part que la couronne reste immobile par rapport au bâti ;
 - les deux points de roulement sans glissement I et K et le repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ dans la nouvelle position.
- Q2** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Q3** Justifier la contradiction apparente entre le texte de l'énoncé et le schéma cinématique donné concernant la liaison entre la couronne et le bâti.
- Q4** Dans quel référentiel tous les axes de rotation sont-ils fixes ?
- Q5** Déterminer la loi $f(\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) = 0$.

- Q6 En exploitant la définition d'un entraxe, trouver une relation entre les nombres de dents Z_1 , Z_4 et Z_3 .

On s'intéresse pour la suite de l'exercice au cas usuel où la couronne est immobile par rapport au bâti.

- Q7 Tracer le schéma cinématique d'un tel réducteur.
 Q8 Détailler et calculer le rapport de transmission dans ce cas particulier.

$$Z_1 = 15 \quad Z_4 = 25$$

CIN_54 Pignon-crémaillère

[e1.11>t1-4.6]

pub-pignon-cremaillere-v1

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme pignon-crémaillère à partir de l'épure plane de la figure 1 ci-dessous, sur laquelle un cercle de centre A et de rayon R_2 est tangent à une droite au point I .

On suppose que le contact en I est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

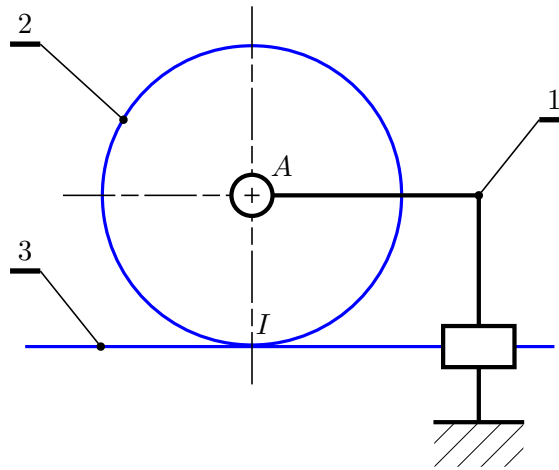


FIGURE 1 – Épure d'un mécanisme pignon-crémaillère

- Q1 Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
 Q2 Tracer le graphe de liaison.
 Q3 Exprimer le non-glissement au point I dans le mouvement 3/2.
 Q4 Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des liaisons pivot et glissière.

CIN_55 Différentiel linéaire

[e1.12>t1-4.9]

exo-différentiel-linéaire-v2

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé sur la figure 1 ci-dessous. Il comprend :

- un bâti 1, auquel est associée une base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre 2, en liaison glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti ;
 - la base 2 est choisie confondue avec la base 1,
- un pignon 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec l'arbre 2 ;
 - on lui associe un repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ et on note α l'angle (\vec{x}_2, \vec{x}_3) ,
- deux crémaillères repérées 4 et 5, en liaisons glissière de direction \vec{x}_1 avec le bâti 1 ;
 - elles engrènent sur le pignon 3 respectivement en I et en K .

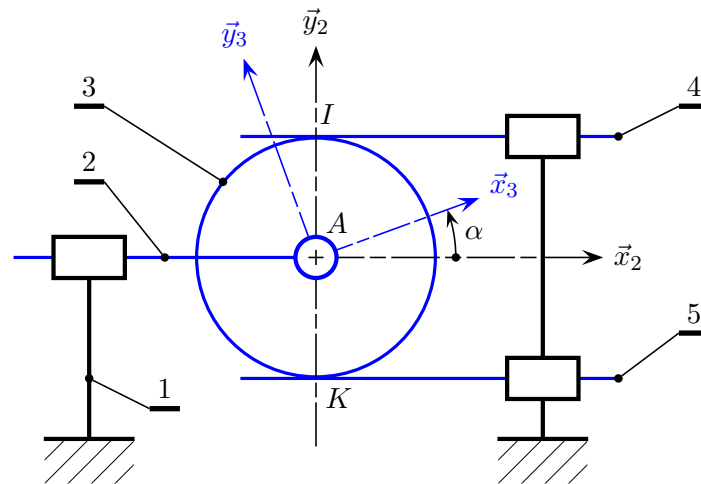


FIGURE 1 – Schéma cinématique du différentiel linéaire

- Q1** Tracer le graphe des liaisons.
- Q2** Soient respectivement V_{41} , V_{51} et V_{21} les vitesses scalaires des solides 4, 5 et 2 par rapport au bâti 1. Caractériser les torseurs cinématiques associés aux liaisons.
- Q3** Déterminer l'équation reliant les trois paramètres scalaires précédents.
- Q4** À partir de cette équation, imaginer et retrouver les mouvements possibles dans les deux cas particuliers suivants :
- on bloque l'arbre 2 par rapport au bâti 1 ;
 - on bloque la rotation du pignon 3 par rapport à l'arbre 2.

CIN_56 Réducteur à renvoi d'angle

exo-renvoi-conique-v1

On considère un réducteur à renvoi d'angle schématisé sur la figure 1. Il est composé de trois ensembles :

- un bâti, repéré 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre moteur, repéré 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti. Sur cet arbre est taillé un pignon conique de Z_2 dents ;
- un arbre récepteur, repéré 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bâti. Sur cet arbre est monté un pignon conique de Z_3 dents qui engrènent avec le pignon 2.

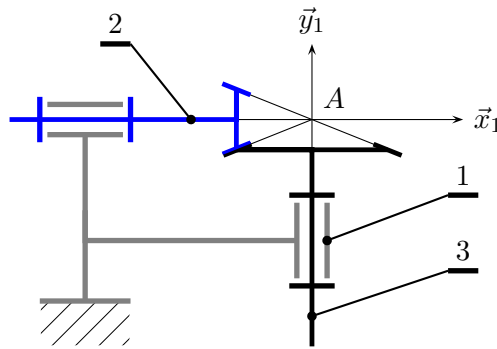


FIGURE 1 – Réducteur à renvoi d'angle

Q1 Par une méthode à préciser, déterminer le rapport de transmission $\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}}$.

Q2 Ce dernier résultat est-il transposable au réducteur schématisé figure 2 ?

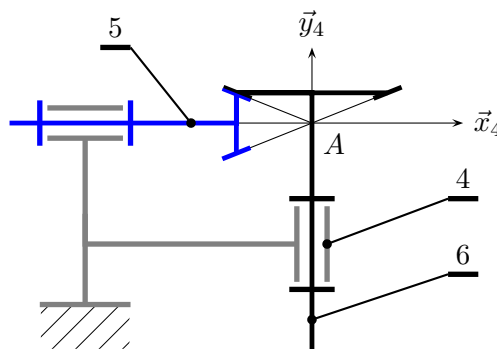


FIGURE 2 – Une configuration différente...

CIN_57 Différentiel

exo-différentiel-v1

On s'intéresse dans cet exercice à un différentiel de véhicule automobile, lequel répartit la puissance venant du moteur vers les deux roues motrices du véhicule.

L'arbre moteur (6) transmet le mouvement de rotation au bloc (5) par rapport au bâti (1), le bloc (5) répartit le mouvement de rotation aux arbres de roues (2) et (3) par l'intermédiaire du pignon (4).

- Les pignons (2), (3) et (4) on les mêmes caractéristiques géométriques.
- Le pignon (6) possède 15 dents, le pignon (5) possède 91 dents.

- Q1** Déterminer le rapport de réduction ω_{51}/ω_{61} .
- Q2** Déterminer la relation reliant les vitesses angulaires ω_{21} , ω_{31} et ω_{51} .
- Q3** Conclure pour les fonctionnements particuliers suivants :
- véhicule en ligne droite : $\omega_{21} = \omega_{31}$;
 - véhicule tournant à gauche : $\omega_{21} = 0,75 \omega_{31}$;
 - roue gauche bloquée : $\omega_{21} = 0$;
 - moteur bloqué : $\omega_{61} = 0$.

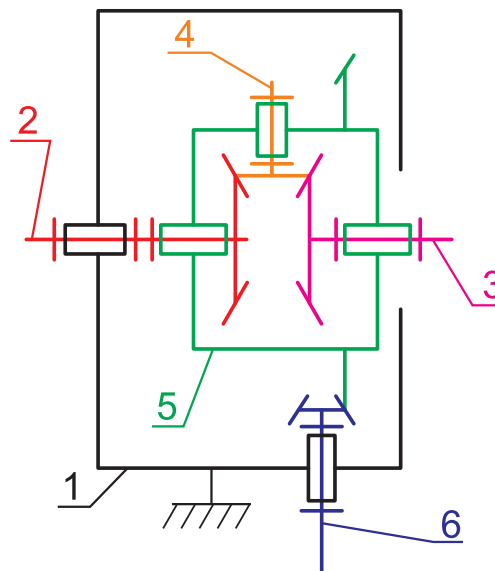


FIGURE 1 – Schéma cinématique d'un différentiel de véhicule

CIN_58 The Falkirk Wheel

[e1.09>t1-4.14]

pub-falkirk-wheel-v1

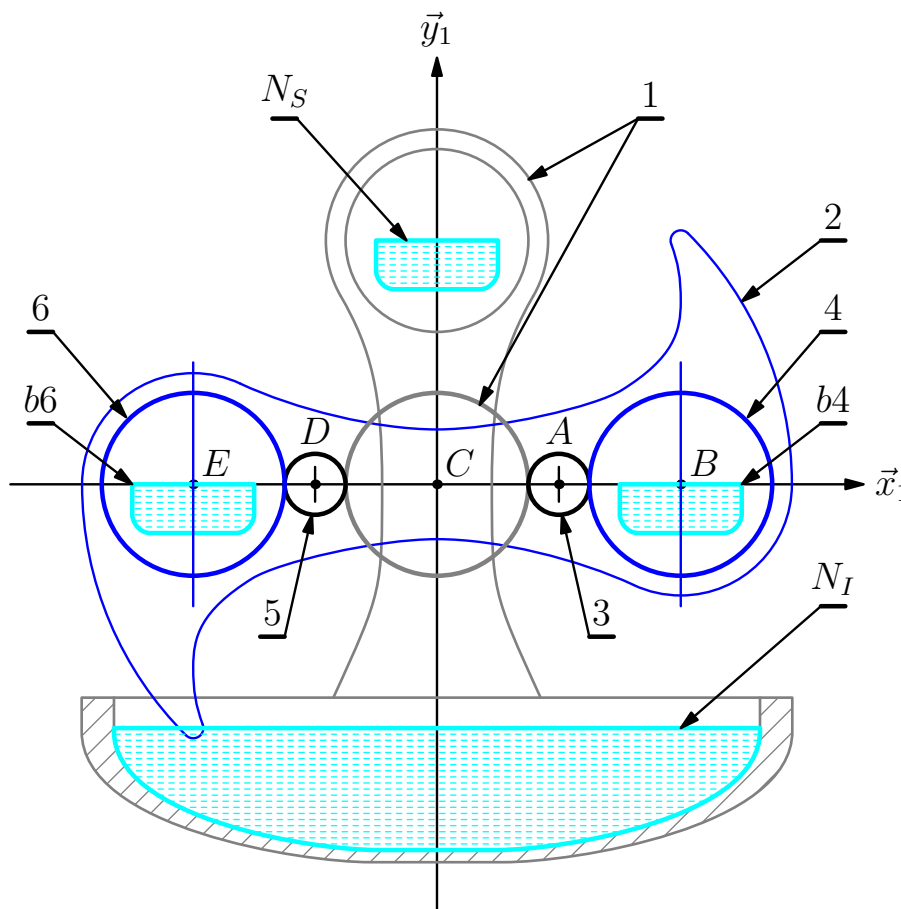
L'élévateur de FALKIRK, en Écosse, permet de faire passer les bateaux d'un plan d'eau de niveau N_I à un canal de niveau N_S à l'aide d'un bras animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal selon le schéma de principe donné ci-dessous.

Le dénivelé est de 25 mètres, et le mécanisme comprend :

- un bâti 1 auquel est associé le repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$; il comporte une roue dentée de Z_1 dents ;
- un bras motorisé 2 en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti 1 ; on lui associe le repère $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, avec $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$, et on pose :
 - l'angle $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
 - les longueurs $\overrightarrow{CA} = a \vec{x}_2$ et $\overrightarrow{CB} = b \vec{x}_2$.
- deux pignons identiques 3 et 5 de $Z_3 = Z_5$ dents, en liaisons pivot respectivement d'axe (A, \vec{z}_2) et d'axe (D, \vec{z}_2) avec le bras 2 ;
- deux roues identiques 4 et 6 de $Z_4 = Z_6$ dents, en liaisons pivot respectivement d'axe (B, \vec{z}_2) et d'axe (E, \vec{z}_2) avec le bras 2.
- deux bacs b_4 et b_6 à considérer encastres respectivement sur les roues 4 et 6.

D'un point de vue géométrique, les roues 6 et 5 sont respectivement les symétriques des roues 4 et 3 par rapport à l'axe (C, \vec{y}_2) .

D'un point de vue cinématique, la principale caractéristique est l'égalité des nombres de dents Z_1 du bâti et des roues extérieures Z_4 et Z_6 .



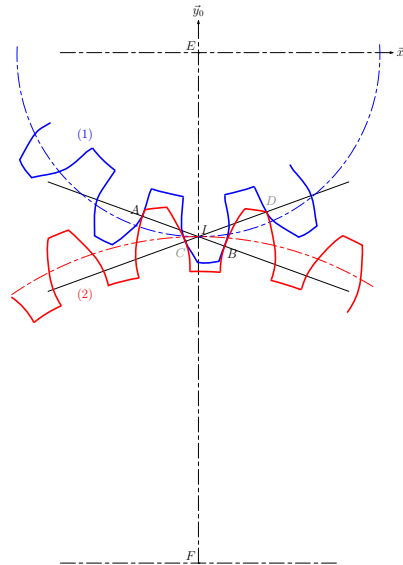
Q1 Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.

Q2 Montrer que les bacs b_4 et b_6 sont bien en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

CIN_59 Cinématique d'un engrenage

exo-engrenage-cinematique-v1

Objectif : montrer, par constructions graphiques, que la transmission par engrenage avec des dentures en développantes de cercle est analogue au roulement sans glissement des deux cercles primitifs modélisant l'engrenage.



Les roues dentées (1) et (2) forment un engrenage à denture droite :

- la roue (1) est en mouvement de rotation d'axe (E, \vec{z}_0) par rapport au bâti (0), on note $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1 \vec{z}_0$;
- la roue (2) est en mouvement de rotation d'axe (F, \vec{z}_0) par rapport au bâti (0), on note $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2 \vec{z}_0$.

Les dentures sont des développantes de cercle, pour un montage correct de l'engrenage les deux cercles de rayon primitif R_1 et R_2 doivent être tangents en un point que l'on notera I.

On a $\vec{IE} = R_1 \vec{y}_0$ et $\vec{FI} = R_2 \vec{y}_0$

La roue (2) est entraînée en rotation par la roue (1) :

- les contacts de dentures se font en A et B si $\omega_1 > 0$,
- les contacts de dentures se font en C et D si $\omega_1 < 0$.

Particularités dues aux développantes de cercle :

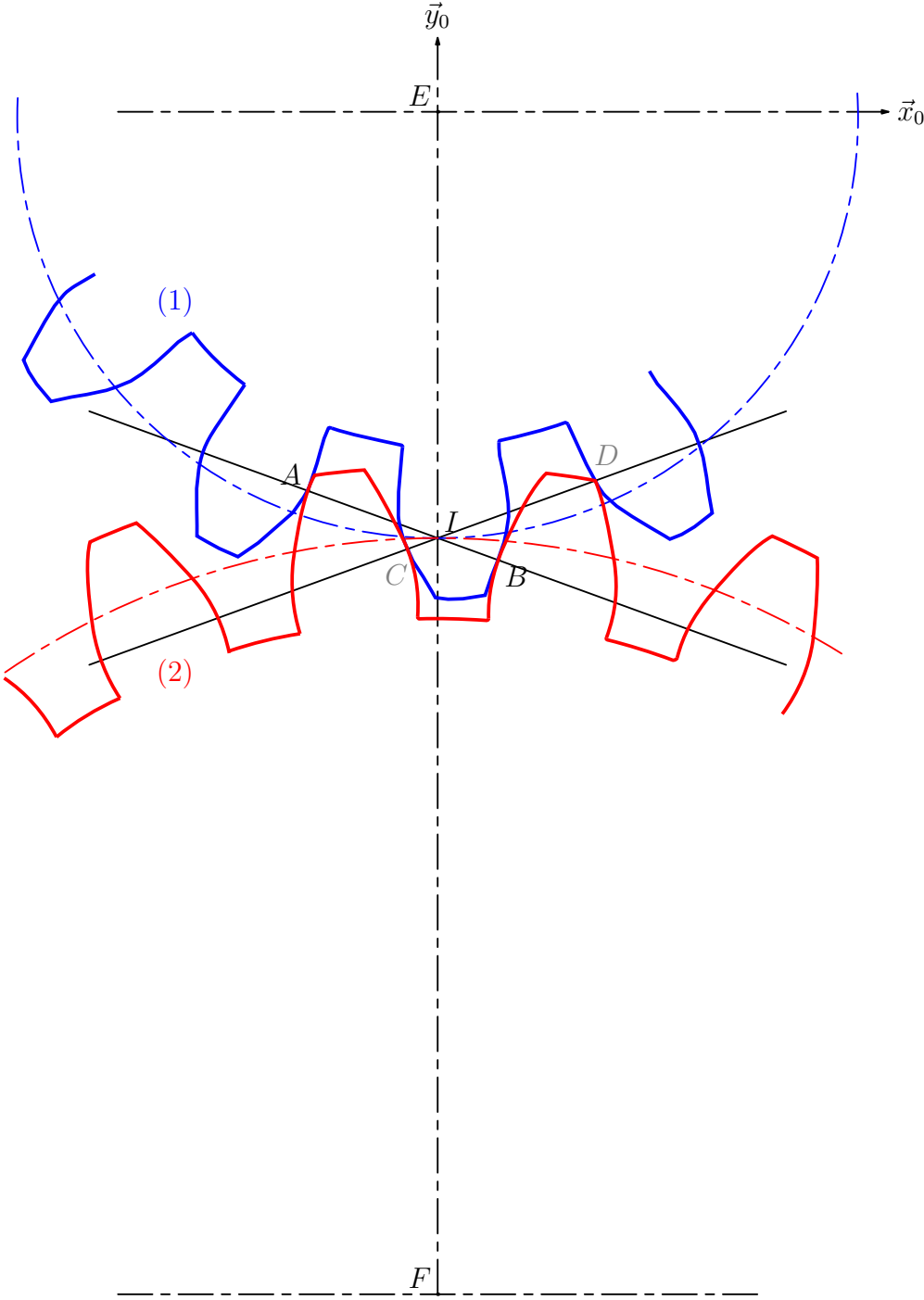
Si $\omega_1 > 0$, le contact entre deux dents se fait obligatoirement sur la droite de pression (AIB) propre à l'engrenage. La droite de pression est perpendiculaire au plan tangent du point de contact des dentures.

Si $\omega_1 < 0$ le contact entre deux dents se fait obligatoirement sur la droite de pression (CID) propre à l'engrenage.

Questions :

- Q1** Déterminer les directions des vitesses $\vec{V}(A, 1/0)$, $\vec{V}(A, 2/0)$ et la vitesse de glissement $\vec{V}(A, 2/1)$. Sachant que $\omega_1 = 100$ rad/s et que le dessin est à l'échelle 1 : 1, tracer $\vec{V}(A, 1/0)$, en déduire graphiquement $\vec{V}(A, 2/0)$ et $\vec{V}(A, 2/1)$. Calculer ω_2 à partir de $\vec{V}(A, 2/0)$.
- Q2** Refaire la même démarche et les mêmes calculs au point B.
- Q3** Calculer ω_2 à partir du non-glissement en I.
- Q4** Que peut-on dire des vitesses de glissement ?
- Q5** Possibilité de faire la même démarche avec les points C, D et I lorsque $\omega_1 = -100$ rad/s.

Figure pour les constructions



CIN_61 Poulie-Courroie

exo-poulie-courroie-v1

Un mécanisme est constitué d'un bâti 1 et de deux poulies 2 et 4 de rayons R_2 et R_4 reliées par un lien flexible inextensible dont les brins tendus sont repérés 3 et 5. On considère le brin tendu 3 roulant sans glisser sur chacune des poulies respectivement en I et J .

Le problème est supposé plan.

- Au solide 1 sont associés les repères $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_{11}(A, \vec{x}_{11}, \vec{y}_{11}, \vec{z}_1)$.
On pose $\vec{AB} = a\vec{x}_1$ et $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_{11})$ tel que $\sin \delta = (R_4 - R_2)/a$.
- La poulie 2 est liée à 1 par une liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) .
Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ est attaché à 2 et on pose $\alpha_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.
- La poulie 4 est liée à 1 par une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) .
Le repère $R_4(B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_1)$ est attaché à 4 et on pose $\alpha_{41} = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$.
- Le repère $R_3(P, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$ est lié au solide 3 et on pose $\vec{AP} \cdot \vec{x}_{11} = \lambda_{31}$.

- Q1** Tracer le graphe de structure du mécanisme.
- Q2** Trouver la relation entre $\dot{\alpha}_{21}$ et $\dot{\alpha}_{41}$.
- Q3** Soit K un point lié à 4 tel que $\vec{BK} = R\vec{x}_4$. Écrire l'expression la plus simple des vecteurs vitesse $\vec{V}(K, 4/1)$ et $\vec{V}(K, 4/3)$.
- Q4** Donner l'expression paramétrique de la trajectoire du point K dans 3 en fonction de α_{21} .

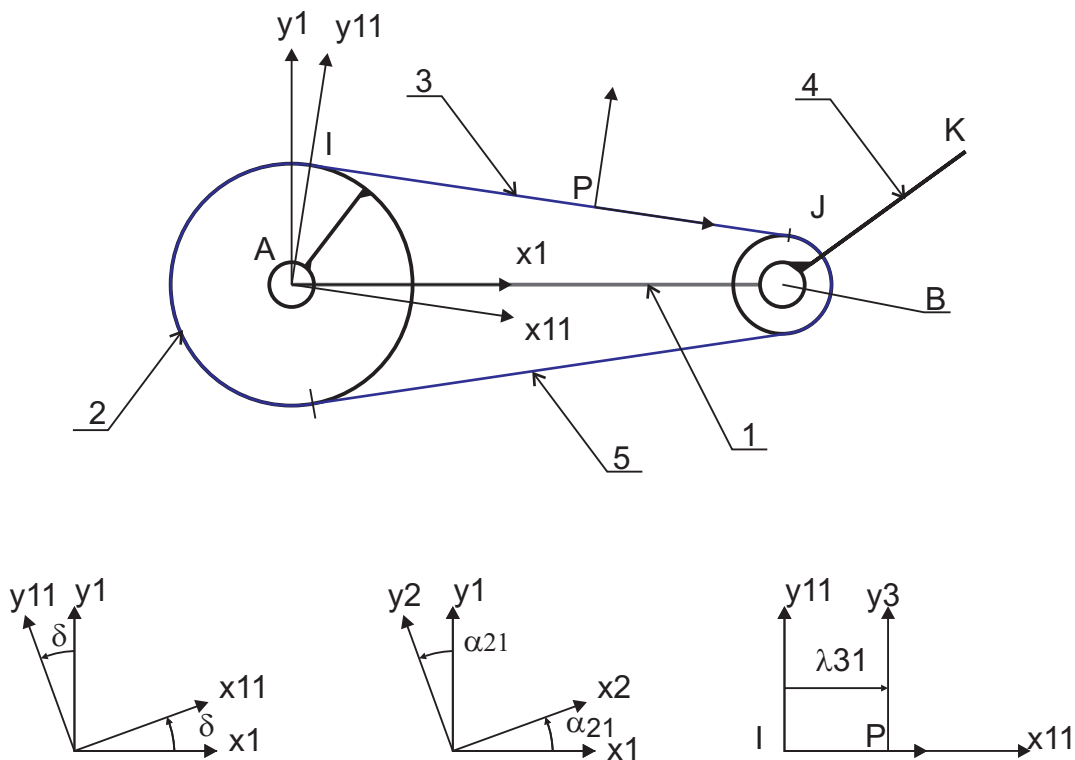


FIGURE 1 – Un schéma cinématique du mécanisme

CIN_62 Mécanisme épicycloïdal

[t1-4.11]

pub-mecanisme-epicycloidal-v1

La figure 1 propose une architecture de bras manipulateur combinant deux mouvements de rotation à partir d'un seul moteur.

Ce mécanisme comprend trois ensembles :

- Un bâti 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, et sur lequel est fixée une poulie d'axe (A, \vec{z}_1) et de rayon R_1 .
- Un bras 2 motorisé, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti.
On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, ainsi que $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_2$.
- Un poignet 5, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_2) avec le bras 2.
On lui associe un repère $(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ en choisissant $\vec{z}_5 = \vec{z}_2$ et on pose $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_5)$, ainsi que $\overrightarrow{BK} = b\vec{x}_5$.
Sur ce poignet est montée une poulie d'axe (B, \vec{z}_5) et de rayon R_5 .
- une courroie inextensible et infiniment souple est tendue autour des deux poulies 1 et 5. Les deux brins sont repérés 3 et 4.

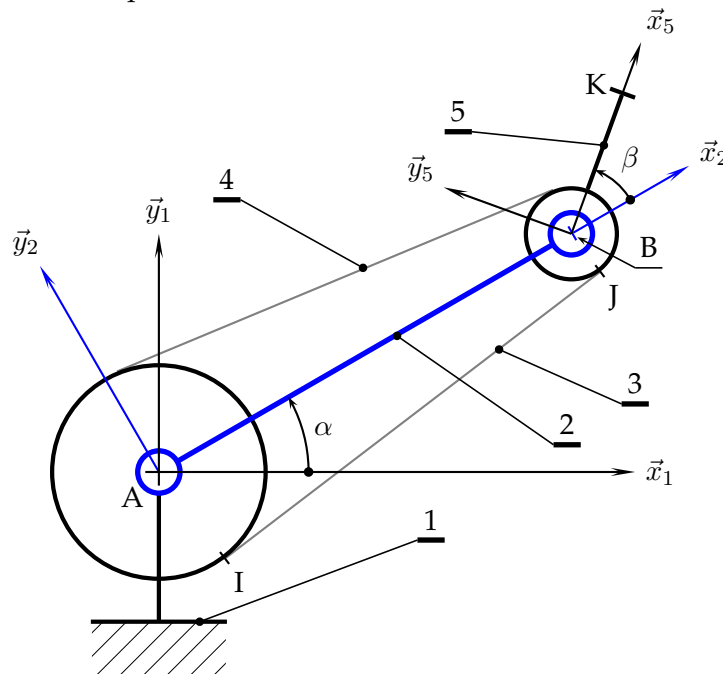


FIGURE 1 – Schéma cinématique du bras manipulateur

L'objectif de cet étude est de caractériser différents mouvements à partir de l'expression paramétrique de la trajectoire du point K dans le référentiel 1.

- Q1** Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
- Q2** Tracer les figures de définition des deux angles α et β .
- Q3** Déterminer la relation $\dot{\beta} = f(\dot{\alpha})$.
- Q4** Écrire les expressions les plus simples des vecteurs vitesses $\vec{V}(K, 5/2)$ et $\vec{V}(K, 5/1)$.
- Q5** En prenant comme condition initiale $\beta = \beta_0$ pour $\alpha = 0$, donner l'expression paramétrique de la trajectoire du point K dans le référentiel 1 en fonction de l'angle α .
- Q6** Déterminer la nature de cette trajectoire dans les cas particuliers suivants
- $R_1 = R_5, b = 2a$ et $\beta_0 = 0$;
 - $R_1 = 2R_5, b = a$ et $\beta_0 = 0$;
 - $R_1 = 4R_5, b = \frac{a}{2}$ et $\beta_0 = 180^\circ$.

CIN_71 Lois de commande d'un moteur de robot

[t1-3.5]

pub-lois-de-commande-v1

On considère un chariot de robot dont on commande le déplacement avec la loi en trapèze de vitesse donnée sur la figure 1 :

- la vitesse nominale de déplacement vaut : $v_0 = 2 \text{ m/s}$;
- le temps de montée est donné à : $\Delta t_a = 100 \text{ ms}$.

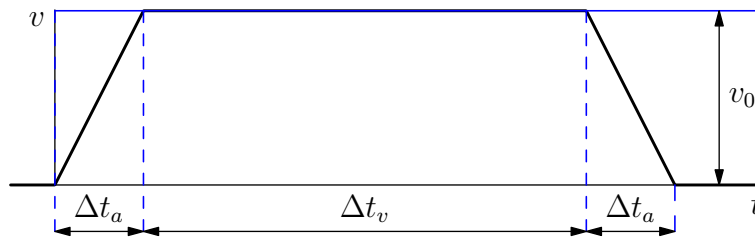


FIGURE 1 – Loi de commande en trapèze de vitesse

- Q1** Calculer la valeur de Δt_v pour un déplacement total souhaité de $\Delta x = 1 \text{ m}$.
- Q2** Superposer à la courbe définissant le trapèze de vitesse les allures des courbes de position et d'accélération.
- Q3** Déterminer le déplacement minimum en dessous duquel la loi de commande devient particulière.
- Q4** Pour amortir les chocs en fonctionnement, on souhaite commander le déplacement Δx du chariot à l'aide de trapèzes d'accélération. Construire le jeu de courbes position, vitesse, accélération et jerk sur une même figure.

On appelle *jerk*, noté j , le taux de variation de l'accélération : $j = \frac{da(t)}{dt}$.

CIN_81 Robot à structure parallèle

On considère le robot manipulateur plan suivant.

exo-robot-parallele-v1

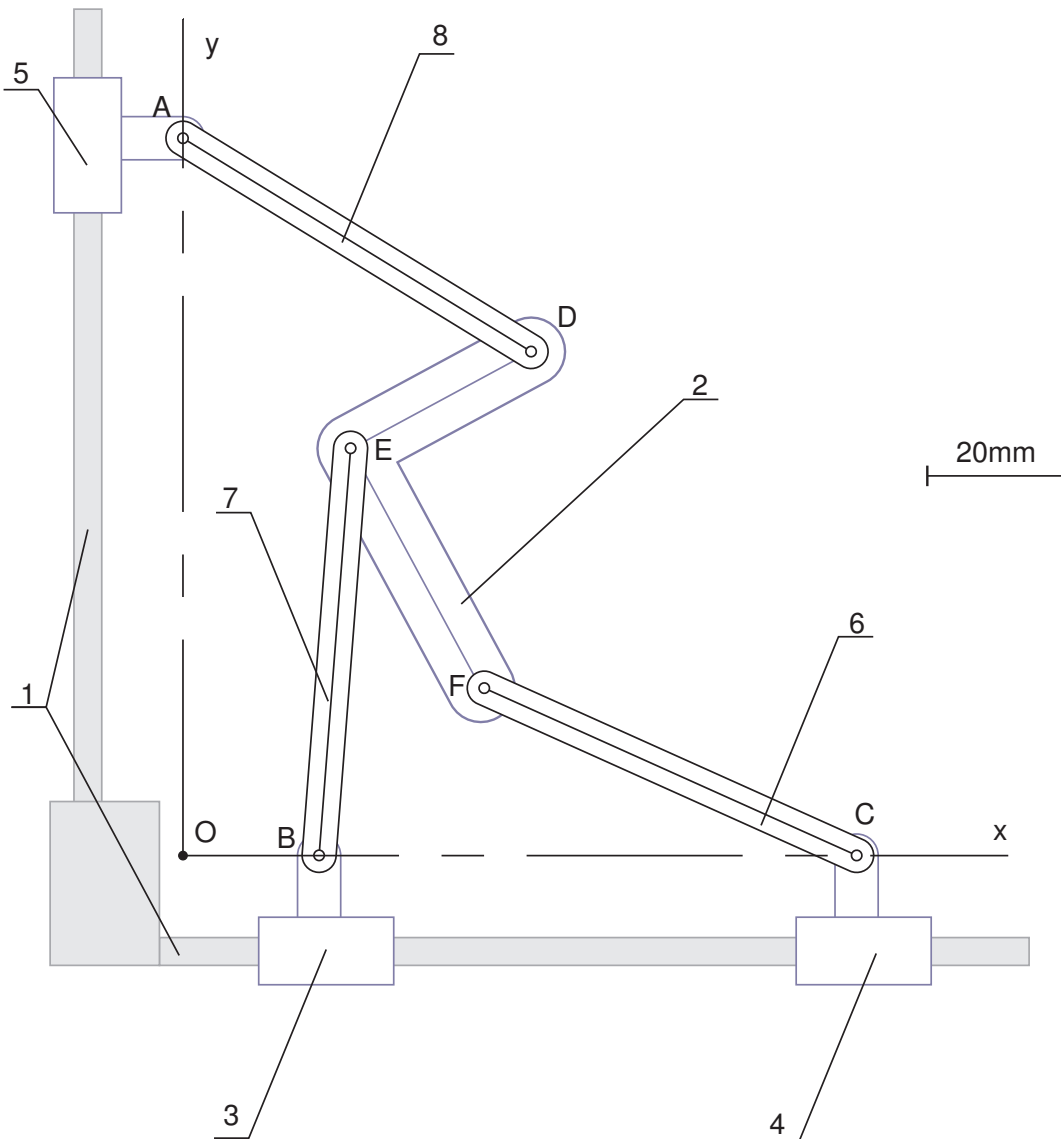


FIGURE 1 – Schéma de principe du robot étudié

Il comprend un bâti 1, trois coulisseaux 3, 4, 5 et trois biellettes 6, 7, 8. Les coulisseaux sont entraînés en translation par rapport au bâti par trois actionneurs linéaires non représentés : les coulisseaux 3 et 4 selon la direction \vec{x} , le coulisseau 5 selon \vec{y} .

On se place dans la situation particulière suivante :

- les coulisseaux 3 et 5 sont immobilisés par rapport au bâti 1 ;
- seul l'actionneur de 4/1 est activé, tel que $V_{41} = 40 \text{ mm/s}$.

Q1 Déterminer $\vec{V}(D, 2/1)$ ainsi que $\vec{\Omega}(2/1)$.

Q2 Pour l'actionneur du mouvement 4/1, on a un positionnement précis à $\pm 1 \text{ mm}$: évaluer la précision de positionnement du solide 2 par rapport à 1 dans la posture actuelle.

Remarque : pour les vitesses, on utilise l'échelle $10 \text{ mm/s} \longleftrightarrow 10 \text{ mm}$

CIN_82 Robot « Ericc »

pub-ericc-v2

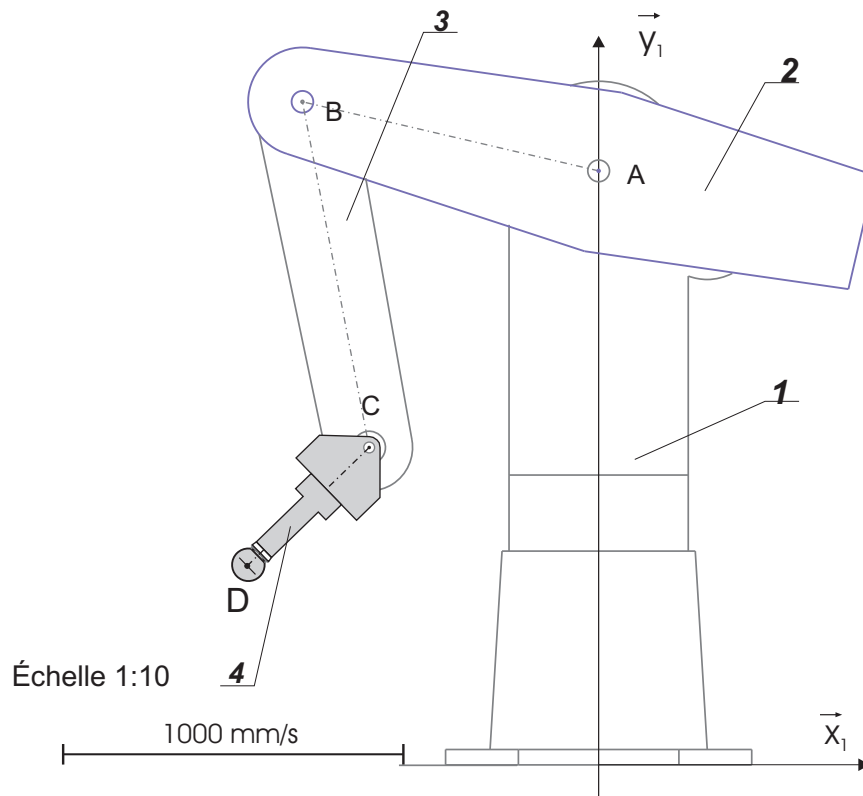


FIGURE 1 – Le robot « Ericc » équipé de l'outil « sphère »

On considère le robot dans la position particulière définie sur la figure 1 :

- la chaise 1 est prise comme bâti et on lui associe le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- le bras 2 est en rotation par rapport à la chaise 1 autour de l'axe (A, \vec{z}_1) , avec un taux de rotation à l'instant considéré de $\omega_{21} = 0,5 \text{ rad/s}$;
- l'avant-bras 3 est en rotation par rapport au bras 2 autour de l'axe (B, \vec{z}_1) , avec un taux de rotation à l'instant considéré de $\omega_{32} = -1 \text{ rad/s}$;
- le poignet 4 peut tourner par rapport à l'avant-bras 3 autour de l'axe (C, \vec{z}_1) , mais il est à l'instant considéré sans mouvement par rapport à l'avant-bras.

Toutes les constructions sont à faire dans la position particulière de la figure du document réponse, en y relevant à la règle les dimensions utiles.

Q1 Déterminer graphiquement les vecteurs vitesse $\vec{V}(C, 3/2)$, $\vec{V}(C, 2/1)$ et $\vec{V}(C, 3/1)$.

Q2 Déterminer la position du centre instantané de rotation I_{31} .

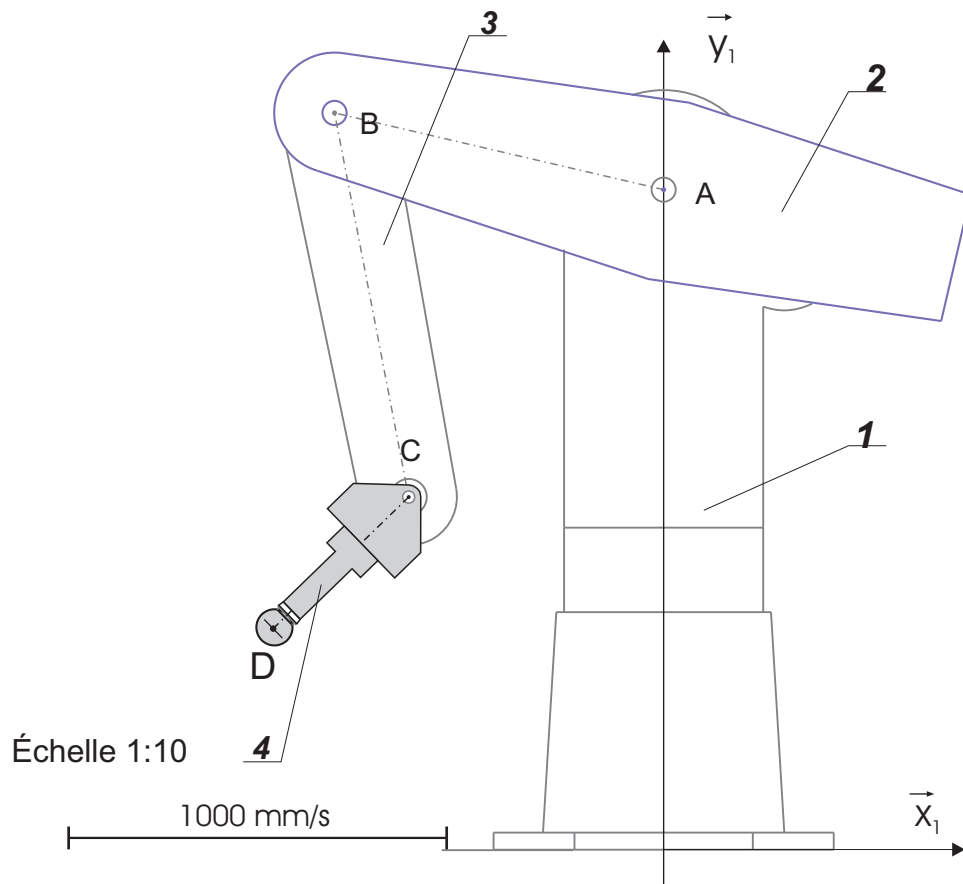
Q3 Déterminer graphiquement le vecteur vitesse $\vec{V}(D, 4/1)$.

Q4 Sur une feuille vierge, tracer le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et reporter à l'échelle 1 : 10 le point D . Imaginer les mouvements possibles conservant la position du point D dans le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$, puis construire les positions des points B et C telles que l'avant-bras 3 soit vertical, c'est à dire telles que les vecteurs \vec{CB} et \vec{y}_1 soient colinéaires.

Q5 Dans cette nouvelle position, déterminer les valeurs des taux de rotation ω_{43} , ω_{32} et ω_{21} à imposer pour obtenir la rotation du poignet 4 par rapport à la chaise 1 autour de l'axe (D, \vec{z}_1) à une vitesse de 2 rad/s . Lors de ce mouvement, on conserve bien le point D immobile dans le mouvement 4/1.

Robot « Ericc »

- DOCUMENT RÉPONSE -



CIN_83 Bras hydraulique AMPLIROLL

exo-bras-ampliroll-v1

Soit à étudier le système AMPLIROLL. Il comprend un châssis 1, un container 2, un crochet 3 et un vérin de corps 4 et de tige 5.

À l'instant de l'étude :

- le mouvement de rentrée de la tige 5 est tel que cette dernière est en translation par rapport au corps 4 à la vitesse de 20 mm/s ;
- le container est en contact avec roulement sans glissement en un point K avec le galet 6, ce dernier étant en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}) avec le châssis ;
- le crochet 3 est en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) avec le container et en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}) avec le châssis ;
- la tige 5 du vérin est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}) avec le crochet 3 le corps 4 est en liaison pivot d'axe (E, \vec{z}) avec le châssis



FIGURE 1 – Un exemple de bras AMPLIROLL

Objectif : déterminer graphiquement la vitesse du centre de gravité G du container dans son mouvement par rapport au châssis. On précisera si à cet instant le vérin est moteur ou récepteur si le seul solide pesant² est le container.

Q1 Mettre en place le vecteur vitesse $\vec{V}(C, 5/4)$.

Q2 Déterminer $\vec{V}(C, 3/1)$.

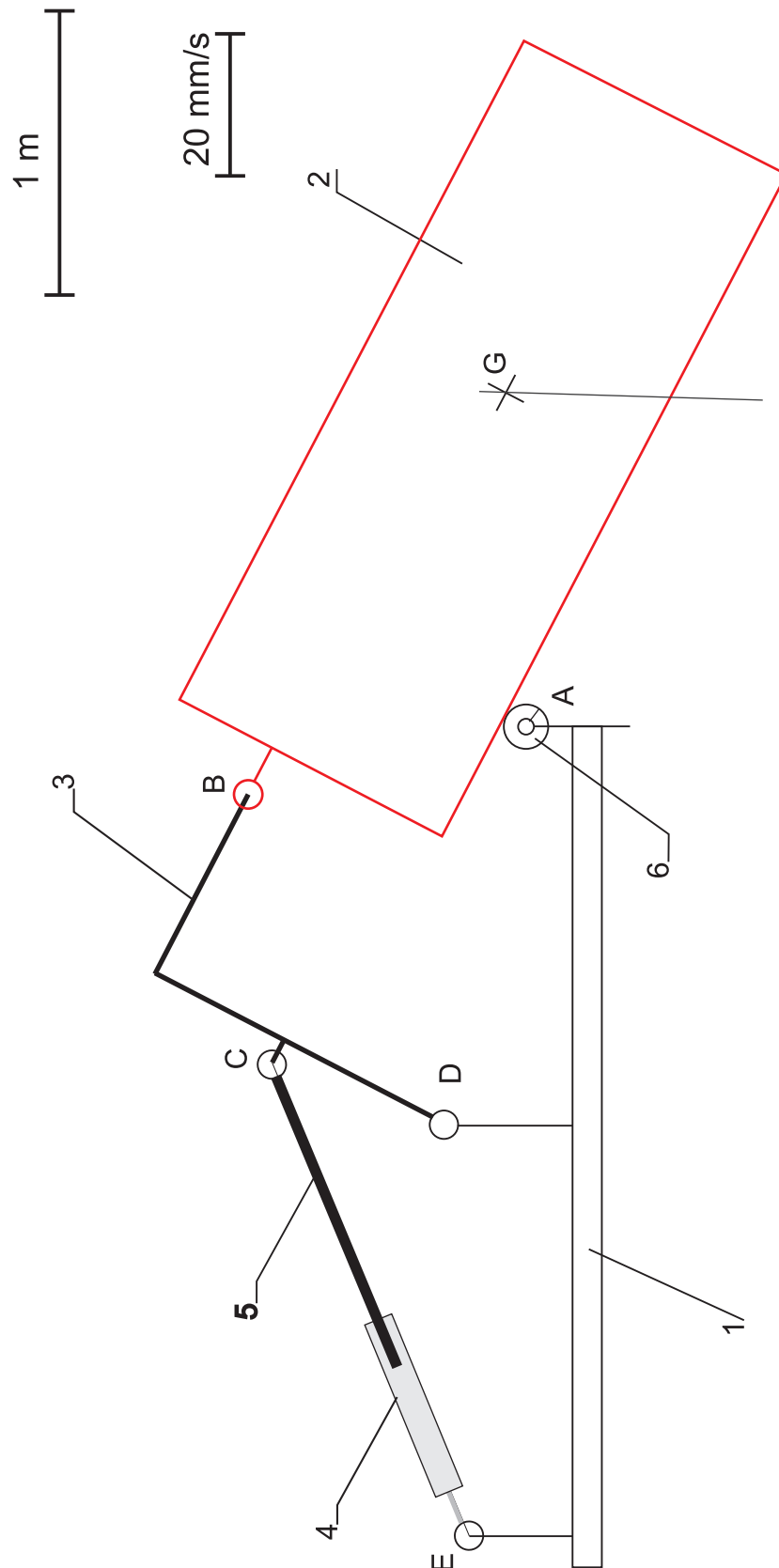
Q3 Quelle est la particularité de $\vec{V}(K, 2/1)$?

Q4 Déterminer $\vec{V}(G, 2/1)$ ainsi que le signe du produit scalaire $\vec{F}(p \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(G, 2/1)$, puis conclure.

2. Le poids se modélise par un glisseur dont l'axe central passe par le centre de masse G de l'objet considéré. On note alors $\vec{F}(p \rightarrow 2)$ l'action de la pesanteur sur le container 2.

Bras « Ampliroll »

- DOCUMENT RÉPONSE -



CIN_84 Robot ABB340

exo-robot-abb340-v1



Les robots à structure parallèle permettent de rendre minimales les masses mise en mouvement et on peut ainsi atteindre des cadences de 150 cycles/min pour la manipulation de petits objets (*picking*).

Trois bras entraînés en rotation par rapport au bâti par trois actionneurs provoquent une translation de la plaque terminale. Un quatrième actionneur permet la rotation du préhenseur par rapport à la plaque terminale autour d'un axe qui est sur la photo verticale. Un préhenseur est à l'extrémité du robot, ici une ventouse.

Ce mécanisme, dont l'étude est spatiale, est ici très simplifiée pour permettre une étude plane.

Description du modèle à cinématique plane

La figure 1 propose l'architecture du modèle plan retenu, pour lequel on considère :

- un bâti 1, orienté par un vecteur \vec{z} orthogonal au plan d'étude ;
- deux bras moteurs 2 et 4, en liaison pivot avec le bâti d'axes respectifs (A, \vec{z}) et (E, \vec{z}) , et comportant des actionneurs imposant les vitesses ω_{21} et ω_{41} ;
- deux biellettes 3 et 5, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) et (F, \vec{z}) avec les bras 2 et 4, et en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}) et (G, \vec{z}) avec la plaque terminale 6.

Des éléments non représentés restreignent le mouvement 6/1 à une translation³ dans le plan de la figure.

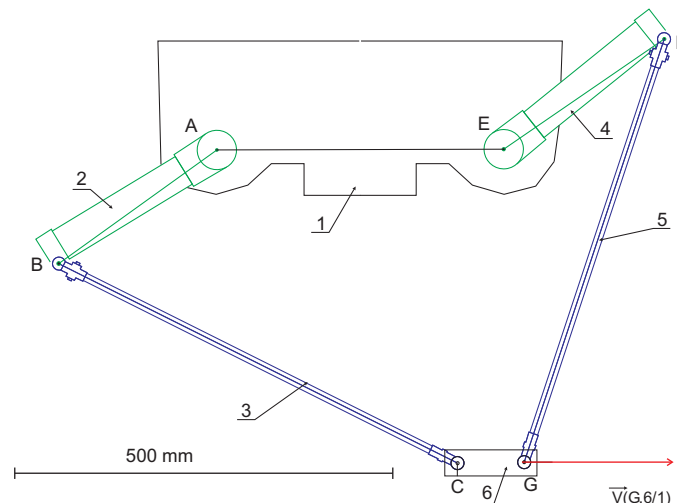


FIGURE 1 – Architecture du modèle plan

Q1 Déterminer graphiquement $\vec{V}(B, 2/1)$ et $\vec{V}(F, 4/1)$.

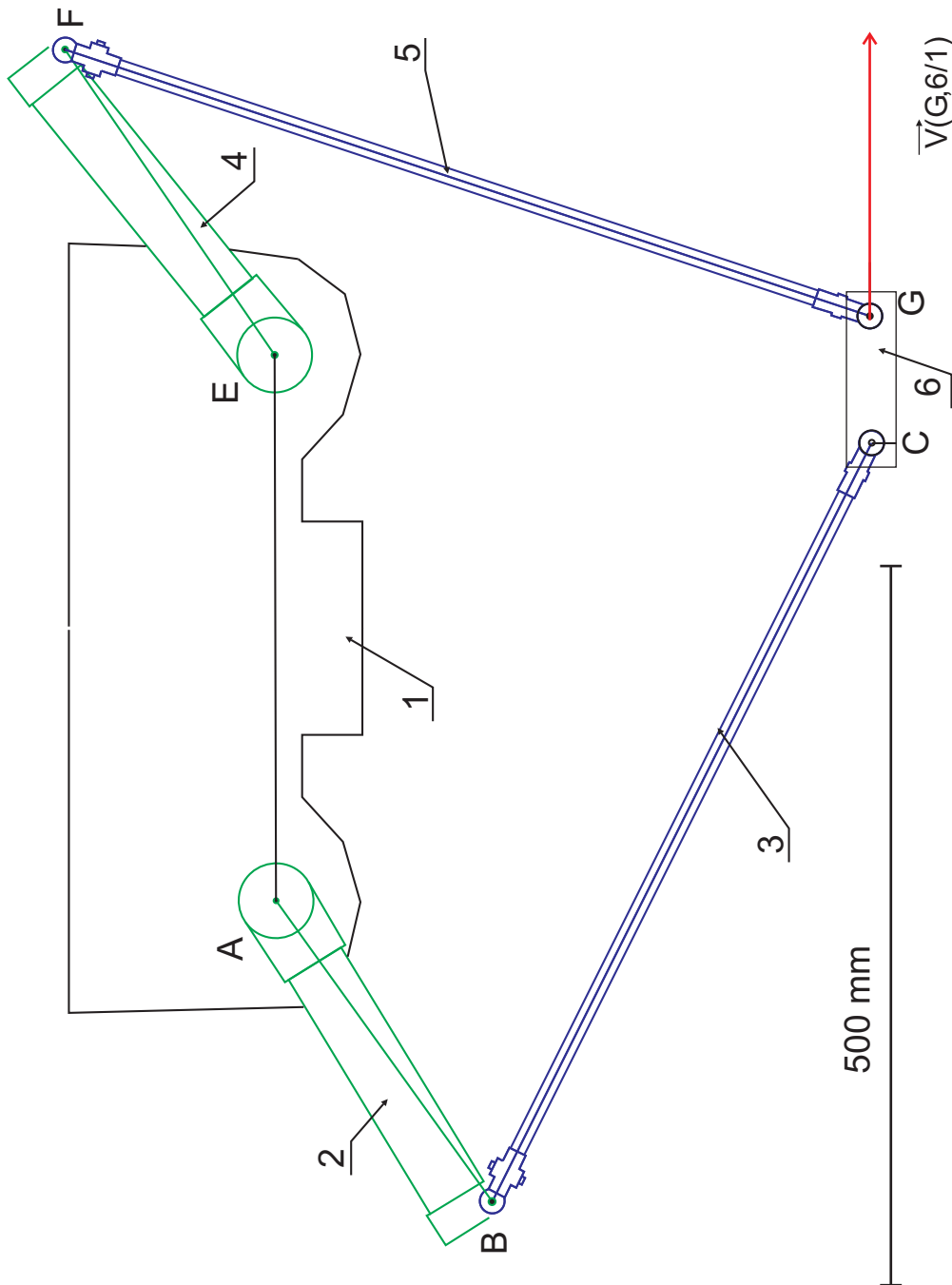
Q2 En déduire les valeurs de ω_{21} et ω_{41} .

3. Une translation est le mouvement d'un objet sans rotation, parallèlement à lui-même. Une translation est *a priori* quelconque, et ne se limite pas à la translation rectiligne ou circulaire, par exemple...

Recommandations : on indiquera clairement le cheminement permettant la résolution. Les constructions doivent être claires, et si pour un champ de vitesses le C.I.R. est déterminé, on le mettra en évidence, ainsi que la distribution des vitesses qui en découle, en utilisant une couleur par champ de vecteurs-vitesse.

Robot « Abb340 »

- DOCUMENT RÉPONSE -



CIN_91 Mécanisme à CROIX DE MALTE

exo-croix-de-malte-v3

Un mécanisme à croix de Malte⁴ comporte :

- une partie menante, roue ou manivelle sur laquelle sont montés un ou plusieurs galets ;
- une partie menée, croix de Malte comportant des rainures radiales régulièrement réparties.

Au cours de la rotation de la roue menante, un des galets s'engage dans une des rainures, entraînant la croix de Malte en rotation, puis se dégage. À chaque passage d'un galet, la croix de Malte tourne ainsi d'un angle donné, puis reste immobile jusqu'au passage suivant.

1 Compréhension globale du fonctionnement

Soit un mécanisme à un galet et trois rainures ébauché sur la figure 1 ci-dessous :

- le bâti est repéré 1 et on suppose l'entraxe $e = AC$ fixé ;
- la roue menante, repérée 2, est en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1, et porte un galet de diamètre d ;
- la croix de Malte, repérée 3, est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_1) avec le bâti 1.

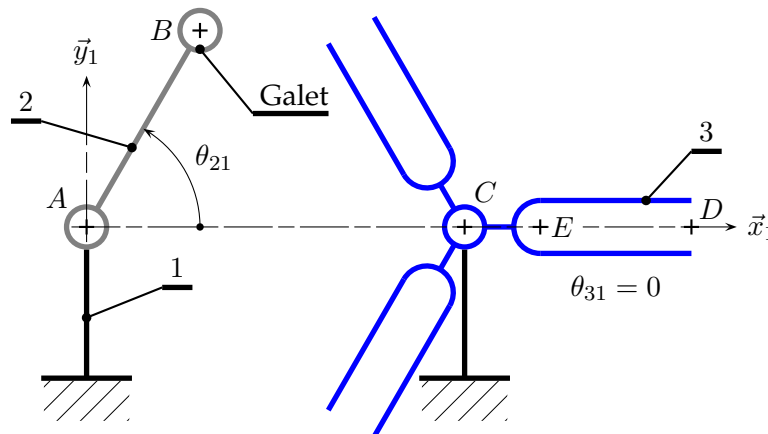


FIGURE 1 – Une ébauche d'un mécanisme à trois branches et un galet

On désire un fonctionnement sans choc, c'est à dire que le galet s'engage suivant l'axe de la rainure.

Q1 Déterminer par la méthode de votre choix et en fonction de l'entraxe e les valeurs des trois paramètres géométriques suivants pour que le fonctionnement souhaité soit possible :

- la longueur $L = AB$;
- la longueur $R = CD$;
- la profondeur des rainures $h = ED$.

Soient θ_{21} la position angulaire et ω_{21} la fréquence de rotation supposée uniforme de la roue menante par rapport au bâti.

Q2 Sans calcul préliminaire particulier et pour deux tours de la roue menante 2, donner l'allure des courbes ω_{31} et θ_{31} en fonction de θ_{21} , puis repérer sur ces courbes les points remarquables.

4. Un tel mécanisme permet de transformer une rotation continue en une rotation intermittente. Il a été mis au point dans les projecteurs de cinéma pour l'avance de la pellicule qui doit s'arrêter à chaque image devant la lampe. Son nom provient de sa ressemblance avec le dessin de la croix de Malte \times , symbole de l'Ordre de Malte. En anglais, ce type de mécanisme est appelé *Geneva drive*, car également longtemps employé en horlogerie.

2 Recherche de performances

En vue de simuler le fonctionnement du mécanisme précédent, on adopte le schéma cinématique tracé sur la figure 2

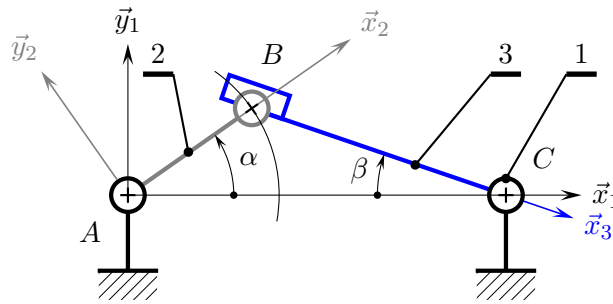


FIGURE 2 – Schéma cinématique du mécanisme

On pilote le mouvement 2/1 avec une rotation continue et uniforme : on obtient alors le tracé des courbes $\beta = f(\alpha)$ et $10\frac{\dot{\beta}}{\dot{\alpha}} = g(\alpha)$ de la figure 3, avec α et β en degrés

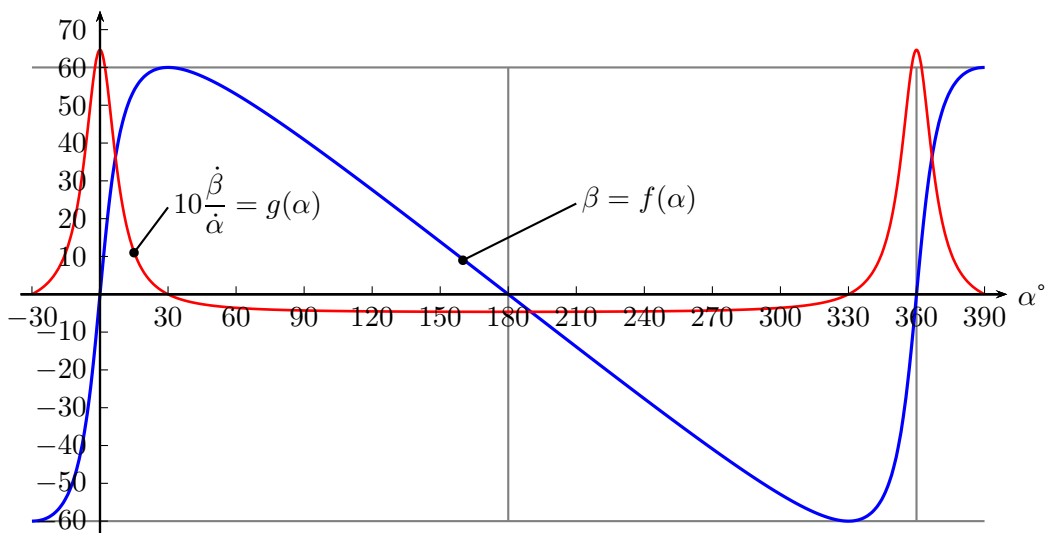


FIGURE 3 – Les résultats numériques de la simulation

Les réponses aux questions suivantes sont à faire sur le document réponse fourni.
Ce document réponse est à rendre impérativement avec la copie, même s'il n'a pas été utilisé.

- Q3** Annoter et commenter ces courbes.
- Q4** Superposer à ces courbes l'allure de la loi $\dot{\beta} = h(\alpha)$.
- Q5** Au vu de ces tracés, peut-on valider l'hypothèse de fonctionnement sans choc ?